



وزارة المعارف العمومية

كتاب الهندسة

للمدارس الثانوية

الأجزاء الثلاثة الأولى

تأليف هول واستيفنز

وفيه بعض التعديل بما يلائم حالة المدارس المصرية

عزبه بأمر وزارة المعارف العمومية

محمد أسعد براده

مساعد مفتش بوزارة المعارف العمومية

(حقوق الطبع محفوظة للوزارة)

الطبعة الخامسة

بالمطبعة الأميرية بالقاهرة

١٩٢٥

محتويات الكتاب

الجزء الأول

صفحة	
٣	البديهيات
٤	التعاريف والمبادئ الأولية
٧	العمليات المسلم بصحة فرضها
٨	الانطباق والتساوى
٨	القضايا المسلم بصحتها
٩	تمهيد
٩	الرموز

في الخطوط والزوايا

- ١٠ نظرية ١ — مجموع الزاويتين المتجاورتين الحادثتين من تلاقي مستقيم بآخر وفي جهة واحدة منه يساوى زاويتين قائمتين
- ١١ نتيجة ١ — اذا تقاطع مستقيمان فمجموع الزوايا الأربع الحادثة من تقاطعهما يساوى أربع قوائم
- ١١ » ٢ — اذا مدت عدة مستقيمت من نقطة واحدة فمجموع الزوايا الحادثة المأخوذة واحدة بعد الاخرى يساوى أربع قوائم
- ١١ » ٣ — (أولا) مكملات الزاوية الواحدة متساوية (ثانيا) متممات الزاوية الواحدة متساوية
- ١٢ نظرية ٢ — اذا كان مجموع أى زاويتين متجاورتين مساويا قائمتين كان ضلعاهما المتطرفان على استقامة واحدة
- ١٤ » ٣ — اذا تقاطع مستقيمان فكل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان

في المثلثات

- ١٦ تعاريف
- ١٨ المقارنة بين مثلثين
- ١٩ نظرية ٤ — ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى في كل ضلعان والزاوية المحصورة بينهما نظائرها في الآخر
- ٢٢ » ٥ — زاويتا قاعدة المثلث المتساوى الساقين متساويتان
- ٢٣ نتيجة ١ — اذا مد كل من ساقى المثلث المتساوى الساقين على استقامته من جهة القاعدة فان كلا من الزاويتين الخارجيتين تكون مساوية للآخرى
- ٢٣ » ٢ — اذا كان المثلث متساوى الأضلاع فانه يكون متساوى الزوايا ايضا

- صفحة
- ٢٤ نظرية ٦ — اذا تساوى فى المثلث زاويتان فان الضلعين المقابلين لهما يكونان متساويين
- ٢٦ » ٧ — ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى كل ضلع من أحدهما نظيره من الآخر
- ٣١ » ٨ — اذا مد أحد أضلاع المثلث على استقامته كانت الزاوية الخارجة الحادثة أكبر من أى زاوية داخلية ماعدا المجاورة لها
- ٣٢ نتيجة ١ — مجموع أى زاويتين فى المثلث أصغر من قائمتين
- ٣٢ » ٢ — يجب أن يكون فى كل مثلث من الزوايا الحادة اثنتان على الأقل
- ٣٢ » ٣ — لا يمكن أن ينزل من نقطة خارج مستقيم الا عمود واحد عليه
- ٣٣ نظرية ٩ — الضلع الاكبر فى أى مثلث تقابله الزاوية الكبرى
- ٣٤ » ١٠ — الزاوية الكبرى فى أى مثلث يقابلها الضلع الأكبر
- ٣٥ » ١١ — أى ضلع فى المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين
- ٣٦ » ١٢ — العمود هو أقصر المستقيمتين التى تخرج من نقطة مفروضة الى مستقيم معلوم
- ٣٦ نتيجة ١ — اذا كان م > أقصر المستقيمتين الخارجة من م الى ا ب فان م > هو العمود النازل من م على ا ب
- ٣٦ » ٢ — المائلان م س و م ص متساويان اذا لاقيا المستقيم المعلوم على بعدين متساويين من موقع العمود
- ٣٧ » ٣ — أى مائلين يخرجان من النقطة المفروضة ويلقيان المستقيم المعلوم على بعدين مختلفين من موقع العمود يكونان مختلفين وأكبرهما ما لاقى المستقيم على بعد أكبر من الموقع المذكور

فى المتوازيات

- ٣٩ بدئية بلايين
- ٤٠ نظرية ١٣ — اذا قطع مستقيم مستقيمين وحدث من ذلك (أولا) أن أى زاويتين متبادلتين متساويتان أو (ثانيا) أن أى زاويتين متناظرتين متساويتان أو (ثالثا) أن مجموع أى زاويتين داخليتين وفى جهة واحدة من القاطع يساوى قائمتين كان المستقيمان فى أى حالة من الأحوال الثلاثة متوازيين
- ٤٢ نظرية ١٤ — اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين يحدث (أولا) أن كل زاويتين متبادلتين متساويتان (ثانيا) أن كل زاويتين متناظرتين متساويتان (ثالثا) أن مجموع كل زاويتين داخليتين فى جهة واحدة من القاطع يساوى قائمتين
- ٤٣ ايضاح المتوازيات بطريقة الدوران . فرض عملى
- ٤٤ نظرية ١٥ — المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان

صفحة	(تابع) المثلثات
٤٦	نظرية ١٦ — مجموع زوايا المثلث الداخلة يساوى زاويتين قائمتين
٤٨	نتيجة ١ — مجموع الزوايا الداخلة لأى شكل كثير الأضلاع مضافا اليه أربع قوائم يساوى من القوائم بقدر ضعف عدد الأضلاع
٥٠	نتيجة ٢ — فى أى مضلع محدب اذا مَدَّ كل ضلع من أضلاعه على استقامته من جهة واحدة فى ترتيب واحد كان مجموع الزوايا الخارجة الحادثة يساوى أربع قوائم
٥٣	نظرية ١٧ — ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى فى أحدهما زاويتان وضلع نظائرها فى الثانى
٥٥	فى تطابق المثلثين
٥٦	نظرية ١٨ — ينطبق المثلثان القائما الزاوية كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى من أحدهما وتروضلع نظيريهما من الثانى
٥٧	نظرية ١٩ — اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعى الأول أكبر من نظيرتها المحصورة بين ضلعى الثانى كان الضلع الثالث فى المثلث الأول أكبر من نظيره فى المثلث الثانى
٥٨	عكس نظرية ١٩
	فى الأشكال المتوازية الأضلاع
٦١	تعريف
٦٢	نظرية ٢٠ — اذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فى أى شكل رباعى يتساوى ويتوازى الضلعان الآخران
٦٣	نظرية ٢١ — فى متوازى الأضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان وكل زاويتين متقابلتين متساويتان والقطر يقسم الشكل الى قسمين متساويين
٦٤	نتيجة ١ — اذا كانت احدى زوايا متوازى الأضلاع قائمة فكل زاوية أخرى فيه قائمة ايضا
٦٤	نتيجة ٢ — أضلاع المربع متساوية وزواياه قوائم
٦٤	نتيجة ٣ — قطرا متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر
٦٧	نظرية ٢٢ — اذا قطع مستقيم عدة مستقيمت متوازية وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المتوازيات متساوية فالأجزاء المحصورة بينها لاى قاطع آخر متساوية كذلك
٦٨	نتيجة — اذا قسمنا أحد أضلاع المثلث ا ب ح وليكن ا ب الى أقسام متساوية بالنقط س ب ص و ع ثم مددنا من هذه النقط المستقيمت س س ب و ص ص ب و ع ع ب موازية للقاعدة ب ح فان هذه المتوازيات تقسم الضلع الثانى ا ح الى أقسام متساوية
٧١	مقياس الرسم القطرى
	الهندسة العملية — العمليات
٧٤	المقدمة والأدوات اللازم استعمالها

صفحة	عمليات على المستقيمتين والزوايا
٧٥	عملية ١ — المطلوب تصنيف زاوية معلومة
٧٦	» ٢ — المطلوب تصنيف مستقيم محدود
٧٧	» ٣ — المطلوب إقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه
٧٩	» ٤ — المطلوب انزال عمود على مستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه
٨١	» ٥ — المطلوب مد مستقيم يصنع مع آخر معلوم من نقطة مفروضة عليه زاوية تساوي زاوية معلومة
٨٢	» ٦ — المطلوب رسم مستقيم يساوي آخر معلوما من نقطة مفروضة
٨٣	» ٧ — المطلوب تقسيم مستقيم محدود الى عدد ما من الأقسام المتساوية
	في انشاء المثلثات
٨٥	» ٨ — المطلوب انشاء المثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة
٨٧	» ٩ — المطلوب انشاء المثلث المعلوم منه ضلعان وزاوية مقابلة لأحدهما
٨٨	» ١٠ — المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر وأحد الضلعين الآخرين
	في انشاء الأشكال الرباعية
٩١	» ١١ — المطلوب انشاء الشكل الرباعي المعلوم منه زاوية وأضلاعه الأربعة
٩٢	» ١٢ — المطلوب انشاء متوازي الاضلاع المعلوم منه ضلعان متجاوران والزاوية المحصورة بينهما
٩٣	» ١٣ — المطلوب انشاء المربع المعلوم ضلعه
	المحل الهندسى
٩٦	» ١٤ — المطلوب إيجاد المحل الهندسى للنقطة (د) التى بعدها عن النقطتين المعلومتين أ و ب دائماً متساويان
٩٧	» ١٥ — المطلوب إيجاد المحل الهندسى للنقطة (د) التى بعدها عن المستقيمين المعلومين أ ب و ج د دائماً متساويان
٩٨	تقاطع المحال الهندسية
	المستقيمتان المتلاقية في نقطة واحدة في المثلث
١٠١	١ — الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من أوساطها تتلاقى جميعا في نقطة واحدة
١٠١	٢ — منصفات زوايا المثلث تتلاقى جميعا في نقطة واحدة
١٠٢	٣ — المستقيمتان المتوسطتان للمثلث تتلاقى جميعا في نقطة واحدة
١٠٣	نتيجة — ملتقى المستقيمتان المتوسطتان في المثلث على ثلث كل منها من جهة القاعدة والثلثين من جهة الرأس

الجزء الثاني - في المساحات

صفحة	
١٠٧	تعريف
١٠٨	نظرية ٢٣ - مساحة المستطيل
١١٢	نظرية ٢٤ - متوازي الأضلاع المتحدان في القاعدة والمحصوران بين مستقيمين متوازيين متكافئان
١١٣	مساحة متوازي الأضلاع
١١٥	نظرية ٢٥ - مساحة المثلث
١١٧	نظرية ٢٦ - المثلثات المتحدة في القاعدة ورؤوسها على مستقيم مواز لها متكافئة
١١٧	نظرية ٢٧ - المثلثات المتكافئة المتحدة في القاعدة والمرسومة في جهة واحدة منها تكون رؤوسها على مستقيم يوازي تلك القاعدة
١٢١	نظرية ٢٨ - مساحة (أولا) شبه المنحرف
	(ثانيا) أي شكل رباعي
١٢٣	مساحة الأشكال الكثيرة الأضلاع
١٢٧	نظرية ٢٩ - [نظرية فيثاغورس] المربع المنشأ على وتر المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين
١٢٩	طريقة عملية للبرهنة على نظرية فيثاغورس
١٣٢	نظرية ٣٠ - إذا كان المربع المنشأ على أحد أضلاع مثلث يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين كانت الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين قائمة
١٣٤	عملية ١٦ - المطلوب رسم المربع الذي مساحته ضعف مساحة مربع معلوم أو ثلاثة أمثاله أو أربعة أمثاله وهكذا

دعوى عملية على المساحات

١٣٧	عملية ١٧ - المطلوب رسم متوازي الأضلاع الذي يكافئ مثلثا معلوما بحيث تكون إحدى زواياه مساوية لزاوية معلومة
١٣٩	عملية ١٨ - المطلوب رسم مثلث يكافئ شكلا رباعيا معلوما
١٤٠	عملية ١٩ - المطلوب رسم شكل متوازي الأضلاع يكافئ شكلا كثير الأضلاع معلوما بحيث تكون إحدى زواياه مساوية لزاوية معلومة

المحوران الاحداثيان والبعدان الاحداثيان

١٤٦	تمارين على ورق المربعات
-----	-------------------------

الجزء الثالث — الدائرة

تعريف ومبادئ أولية

صفحة

١٥٦ التماثل في الدائرة

١٥٧ بعض خواص التماثل في الدوائر

في الأوتار

١٥٩ نظرية ٣١ — المستقيم المار بمركز الدائرة والمنصف لأي وتر فيها غير مار بالمركز عمود على هذا الوتر وبالعكس إذا كان هذا المستقيم عمودا على الوتر فإنه ينصفه

١٥٩ نتيجة ١ — المستقيم المقام عمودا على وتر في دائرة من منتصفه يمر بمركزها

١٦٠ نتيجة ٢ — المستقيم لا يمكن أن يقطع الدائرة في أكثر من نقطتين

١٦٠ نتيجة ٣ — وتر الدائرة يكون بتمامه فيها

١٦١ نظرية ٣٢ — كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة لا يمكن أن يمر بها إلا محيط دائرة واحد

١٦١ نتيجة ١ — يكفي لتعيين وضع الدائرة ومساحتها معرفة ثلاث نقط فقط من محيطها

١٦١ نتيجة ٢ — لا يمكن أن يشترك محيطا دائرتين في أكثر من نقطتين إلا إذا انطبق كل على الآخر تمام الانطباق

١٦١ فرض عملي

١٦٣ نظرية ٣٣ — إذا أمكن مد ثلاثة مستقيمت متساوية من نقطة داخل دائرة الى محيطها كانت النقطة المذكورة مركز الدائرة

١٦٥ نظرية ٣٤ — الأوتار المتساوية في الدائرة على أبعاد متساوية عن مركزها

وبالعكس الأوتار التي على أبعاد متساوية عن المركز متساوية

١٦٧ نظرية ٣٥ — إذا اختلف بعدا وترين عن مركز الدائرة فأقرب الوترين أكبرهما

وبالعكس أكبر الوترين أقربهما من المركز

١٦٨ نتيجة — أكبر أوتار الدائرة قطرها

١٧٠ نظرية ٣٦ — إذا رسم من نقطة داخل دائرة غير مركزها عدة مستقيمت الى محيطها فأكبرها ما كان

مارا بالمركز وأصغرها هو امتداد الاكبر ليكون قطرا واكبر المستقيمت الأخرى ما كان مقابلا لأكبر زاوية مركزية

١٧٣ نظرية ٣٧ — إذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها عدة مستقيمت الى المحيط فأكبرها مامر

بالمركز وأصغرها ما اذا امتد على استقامته مر بالمركز وأكبر المستقيمت الأخرى

ما كان مقابلا لأكبر زاوية مركزية

الزوايا المرسومة في الدائرة

صفحة

- ١٧٦ نظرية ٣٨ — الزاوية المركزية ضعف الزاوية المحيطية المشتملة معها في القوس المحصور بين ضلعيها
- ١٧٨ نظرية ٣٩ — الزوايا المرسومة في قطعة واحدة من الدائرة متساوية
- ١٧٩ عكس نظرية ٣٩ — الزوايا المتساوية المرسومة على قاعدة واحدة في جهة واحدة منها تكون رؤوسها على قوس دائرة هذه القاعدة وترفيها
- ١٨٠ نظرية ٤٠ — الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي المرسوم داخل دائرة متكاملتان
- ١٨١ عكس نظرية ٤٠ — اذا كانت الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي متكاملتين أمكن أن يمر برؤوسه محيط دائرة واحد
- ١٨٢ نظرية ٤١ — الزاوية المرسومة في نصف الدائرة قائمة
- ١٨٣ نتيجة — الزاوية المرسومة في قطعة أكبر من نصف الدائرة حادة والتي في قطعة أصغر من نصف الدائرة منفرجة
- ١٨٤ نظرية ٤٢ — في الدوائر المتساوية اذا كانت الزوايا المركزية أو المحيطية متساوية كانت أقواسها متساوية
- ١٨٤ نتيجة — في الدوائر المتساوية تتساوى القطاعات اذا تساوت زواياها
- ١٨٥ نظرية ٤٣ — في الدوائر المتساوية تتساوى الزوايا المركزية أو المحيطية اذا تساوت أقواسها
- ١٨٦ نظرية ٤٤ — في الدوائر المتساوية تتساوى الأقواس اذا تساوت أوتارها القوس الأكبر يساوى الأكبر والأصغر يساوى الأصغر
- ١٨٧ نظرية ٤٥ — في الدوائر المتساوية تتساوى الأوتار اذا تساوت أقواسها

في التماس

١٩٠ تعاريف ومبادئ أولية

- ١٩٢ نظرية ٤٦ — مماس الدائرة في نقطة ما من المحيط عمود على نصف القطر المار بنقطة التماس
- ١٩٢ نتيجة ١ — لا يمكن أن يمد الا مماس واحد لدائرة من نقطة مفروضة على محيطها
- ١٩٢ نتيجة ٢ — العمود المقام على التماس من نقطة التماس لا بد أن يمر بالمركز
- ١٩٢ نتيجة ٣ — نصف القطر العمودي على التماس لا بد أن يمر بنقطة التماس
- ١٩٤ نظرية ٤٧ — يمكن أن يمد من نقطة خارج دائرة مماسان لمحيطها
- ١٩٤ نتيجة — اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها مماسات لها كانا متساويين ومقابلين
- لزاويتين مركبتين متساويتين
- ١٩٧ نظرية ٤٨ — اذا تماس محيطا دائرتين كانت نقطة التماس على خط المراكز
- ١٩٧ نتيجة ١ — اذا تماس دائرتان من الخارج فان البعد بين مركزيهما يساوى مجموع نصفى القطرين

صفحة	
١٩٧	نتيجة ٣ — اذا تماسست دائرتان من الداخل فان البعدين مركزيهما يساوى الفرق بين نصفى القطرين
١٩٩	نظرية ٤٩ — الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة وترها المار بنقطة التماس والواقعة فى احدى جهتي الوتر تساوى الزاوية المحيطية المرسومة على هذا الوتر فى الجهة الأخرى منه

فى الدعاوى العملية

٢٠١	التحليل الهندسى
٢٠٢	عملية ٢٠ — المعلوم دائرة أو قوس منها والمطلوب إيجاد مركزها
٢٠٢	» ٢١ — المطلوب تنصيف قوس معلوم
٢٠٣	» ٢٢ — المطلوب رسم مماس لدائرة من نقطة خارجها
٢٠٤	» ٢٣ — المطلوب رسم مماس مشترك لدائرتين معلومتين
٢٠٧	فى رسم الدوائر
٢٠٩	عملية ٢٤ — المطلوب رسم قطعة دائرة على مستقيم معلوم تقبل زاوية معلومة
٢٠٩	نتيجة — اذا أريد فصل قطعة من دائرة تقبل زاوية معلومة يكفى أن نمد مماسا لهذه الدائرة ونرسم من نقطة التماس وترافيا يصنع مع المماس المذكور زاوية تساوى الزاوية المعلومة

الدائرة والأشكال المستقيمة الأضلاع

٢١١	تعريف
٢١٢	عملية ٢٥ — المطلوب رسم دائرة خارج مثلث معلوم
٢١٣	» ٢٦ — المطلوب رسم دائرة داخل مثلث معلوم
٢١٤	» ٢٧ — المطلوب رسم دائرة تمس المثلث من الخارج
٢١٥	» ٢٨ — المطلوب رسم مثلث داخل دائرة معلومة زواياه تساوى زوايا مثلث آخر معلوم
٢١٦	» ٢٩ — المطلوب رسم مثلث خارج دائرة معلومة زواياه تساوى زوايا مثلث آخر معلوم
٢١٩	» ٣٠ — المعلوم دائرة والمطلوب رسم مضلع منتظم داخلها وآخر خارجها
٢٢٠	» ٣١ — المعلوم مضلع منتظم والمطلوب رسم دائرة داخله وأخرى خارجه
٢٢١	فى محيط الدائرة
٢٢٢	فى مساحة الدائرة

نظريات وأمثلة على الدوائر والمثلثات

٢٢٦	ملتقى ارتفاعات المثلث
٢٢٩	المحال الهندسية
٢٣١	خط سمسون
٢٣٣	المثلث والدوائر المتعلقة به
٢٣٧	نظرية النقط التسع

الجزء الأول

—

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

علم الهندسة

الجزء الأول

البديهيات

بنى علماء الرياضة جميع براهينهم على قواعد ثابتة ومبادئ بسيطة يدركها العقل لأول وهلة لسهولة ووضوحها ولا يحتاج للتسليم بصحتها الى دقة نظر أو اقامة دليل

وهذه المبادئ البسيطة الأولية تسمى بالبديهيات نحو الأشياء التي يساوى كل منها الشيء نفسه متساوية والبديهيات الآتية مما يحتاج اليها كثيرا في البراهين الهندسية وهي مرتبة على ترتيب القواعد الأربع الأصلية في علم الحساب

الجمع : اذا أضفنا أشياء متساوية الى أخرى متساوية كانت الحواصل متساوية

الطرح : اذا طرحنا أشياء متساوية من أخرى متساوية كانت البواقي متساوية

الضرب : المضاعفات الواحدة للأشياء المتساوية تكون متساوية فان كان شيان متساويين كان مثلا أحدهما مساويين لمثلي الآخر

القسمة : اذا انقسم كل من الأشياء المتساوية الى عدد واحد من أجزاء متساوية كانت هذه الأجزاء في الجميع متساوية .

فإنصاف الأشياء المتساوية متساوية

وهذه البديهيات لم نوردناها هنا إلا على سبيل التمثيل فقط وهناك غيرها وهي عامة لا مكان تطييقها بمثابة واحدة على جميع المقادير أيا كان نوعها . ولعلم الهندسة بديهيات خاصة نورد كلا منها عند الحاجة

التعاريف والمبادئ الأولية

لكل من النقطة والخط والسطح في علم الهندسة مدلول خاص غير ما تدل عليه عند إطلاقها

١ فالنقطة الهندسية كل ماله وضع مجرد عن الطول والعرض والارتفاع

وهذا معناه أن النقطة لا تتنزل بشيء من الطول والعرض بل تقترب فقط بالموضع الذي تشغله فإذا عينا نقطة بقلم الرصاص الدقيق على قطعة من الورق فهذه يمكن أن تدل بوجه التقريب على نقطة هندسية غير أنها لا تخلو من طول وعرض أبدا مهما صغرت فلا يمكن اعتبارها نقطة هندسية بالمعنى الصحيح وإنما هي كلما صغرت كانت أقرب إلى الدلالة على النقطة الهندسية

٢ والخط ما له طول وليس له عرض

ويحدث من تحرك نقطة فإذا تصورنا تحرك النقطة التي عينناها على الورقة فإنها تحدث ما يمثل الخط ولكن هذا مهما كان دقيقا في الرسم لا يخلو من عرض فلا يمكن اعتباره خطا هندسيا بالمعنى الصحيح وكما دق هذا الخط كان أقرب إلى الخط الهندسي

٣ وإذا تتبعنا الفكرة وانتقلنا من الخط إلى السطح كما انتقلنا من النقطة إلى الخط نقول إن السطح هو ماله طول وعرض وليس له ارتفاع

فالجسم على هذا المنوال هو ماله طول وعرض وارتفاع

وبما ذكر تظهر العلاقة بين الجسم والسطح والخط والنقطة فيما خلاصته

أولا — الجسم يتحدد بسطوح

ثانيا — السطح يتحدد بخطوط والسطوح تتلاقى في خطوط

ثالثا — الخط يتحدد أو ينتهي بنقطتين والخطوط تتلاقى في نقط

٤ الخط إما أن يكون مستقيما أو منحنيا

فالمستقيم ما حدث من تحرك نقطة في اتجاه واحد لا يتغير

والمنحني ما حدث من تحرك نقطة في اتجاه يتغير على الدوام

بيية — إذا وصل بين أي نقطتين معلومتين بمستقيم لا يمكن أن يوصل بينهما بمستقيم آخر وبعبارة

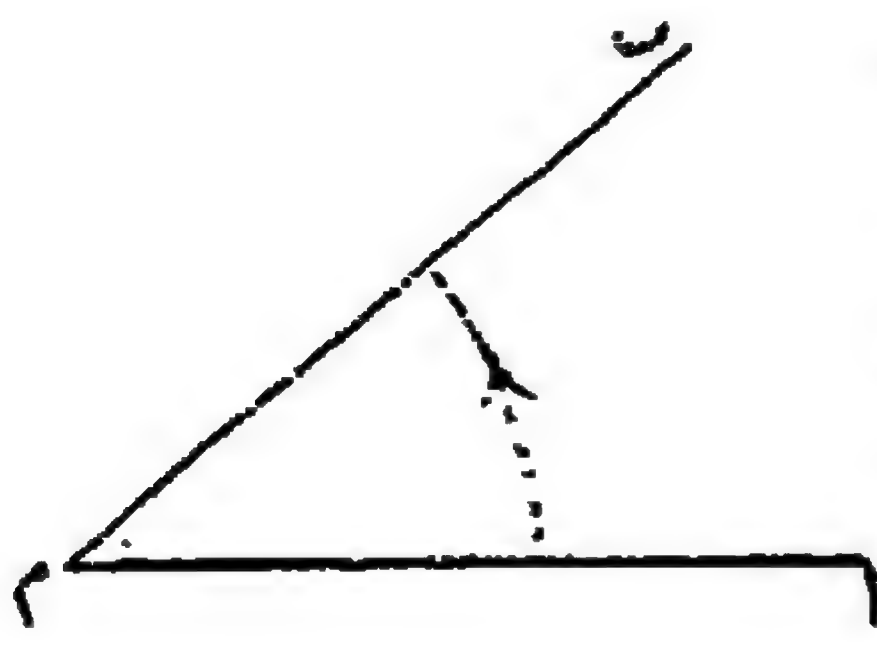
أخرى إذا اشترك مستقيمان في نقطتين فإنهما يتحدان

٥ المستوى هو سطح ينطبق عليه المستقيم تمام الانطباق مهما تغير وضعه

٦ إذا تلاقى مستقيمان في نقطة حدث من تلاقيهما ما يسمى زاوية

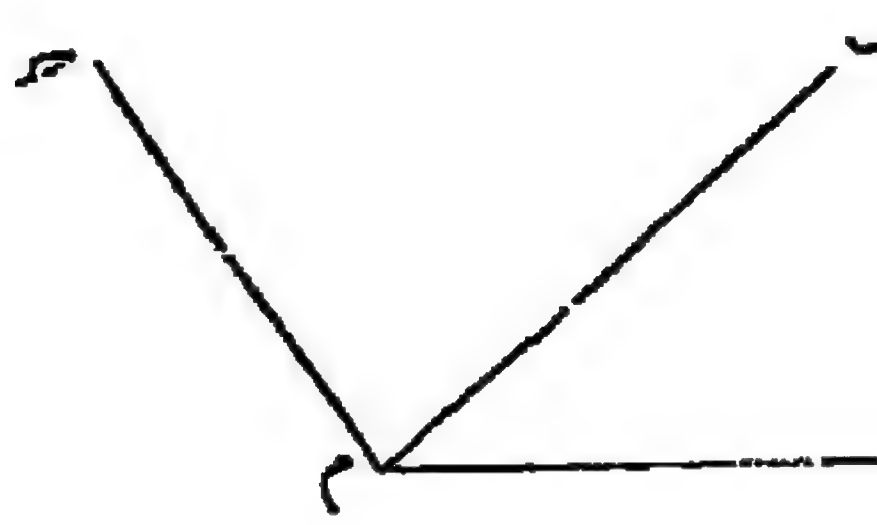
ويسمى كل من المستقيمين بضلع الزاوية ونقطة تلاقيهما برأسها

وهذان الضلعان لا ارتباط لطولهما بمقدار الزاوية المحصورة بينهما الذي هو في الحقيقة مقدار دوران أحد الضلعين واقتراعه عن الآخر ومقدار هذا الدوران لا ارتباط له بطول الضلعين



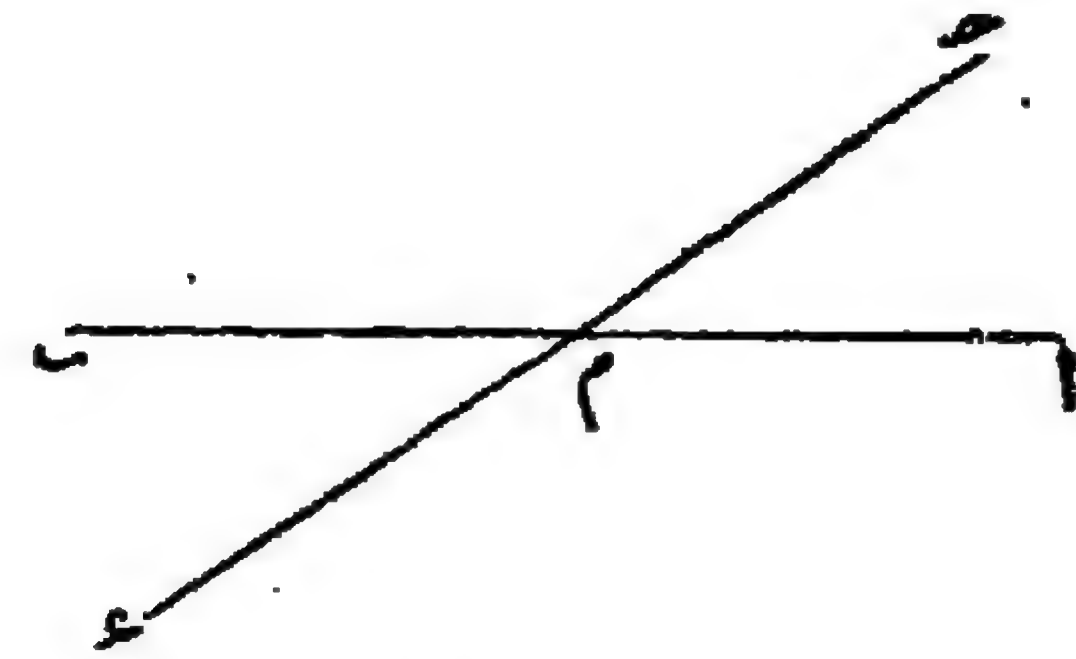
فمثلا ان فرضنا أن الضلع $م ا$ (راجع الشكل) ثابت لا يتحرك وأن الضلع الآخر $م ب$ يتحرك حول نقطة $م$ وأنه قبل تحركه كان منطبقا على $ا م$ ثم تحرك الى أن صار في الوضع $م ب$ فمقدار الزاوية $ا م ب$ الناشئة من ذلك يقدر بقدر دوران هذا الضلع من وضعه الأول $م ا$ الى وضعه الثاني $م ب$

وبديهي أن مقدار هذا الدوران لا ارتباط له بطول الضلعين



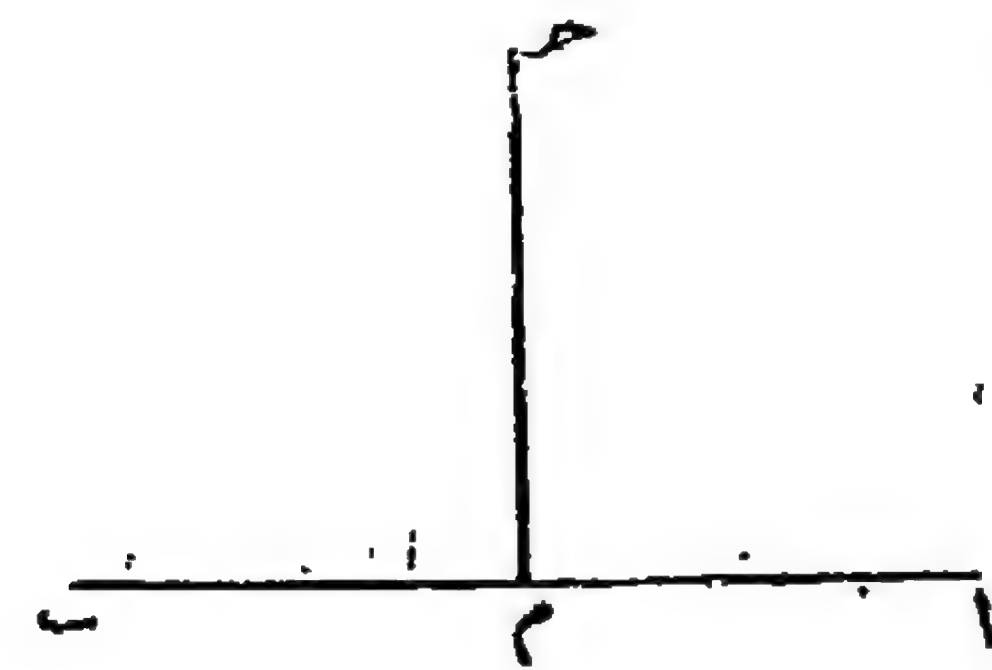
إذا تلاقت عدة مستقيمت في نقطة فكل زاويتين اشتراكا في ضلع واحد وكانت احدهما على جهة منه والثانية على الأخرى تسميان الزاويتين المتجاورتين

فمثلا الزاويتان $ا م ب$ و $ب م ج$ مشتركتان في الضلع $م ب$ وعلى كل من جهتيه متجاورتان



إذا تقاطع مستقيمان مثل $ا ب$ و $ج د$ في نقطة $م$ يقال للزاويتين $ا م ب$ و $ج م د$ أو $ب م ج$ و $ا م د$ متقابلتان بالرأس

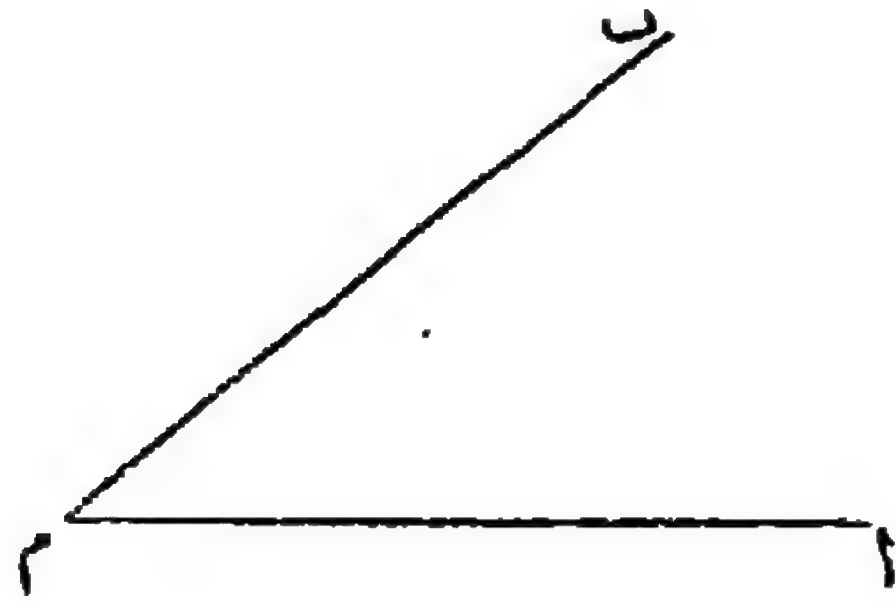
٧ إذا تلاقي مستقيمان وكانت الزاويتان المتجاورتان الحادثتان متساويتين يقال لكل زاوية منهما قائمة ويقال للمستقيمين متعامدان وان كلا منهما عمودي على الآخر



بديهة ١ — نفرض نقطة مثل $م$ على المستقيم $ا ب$ ونصور مستقيما آخر مثل $ج د$ يدور حول $م$ مبتدئا من الوضع $ا م$ ومنتويا في دورانه الى الوضع $ب م$ فانه في أثناء دورانه لا يمكن أن يأخذ إلا وضع واحد يكون فيه عموديا على $ا ب$ بديهة ٢ — الزوايا القوائم متساوية

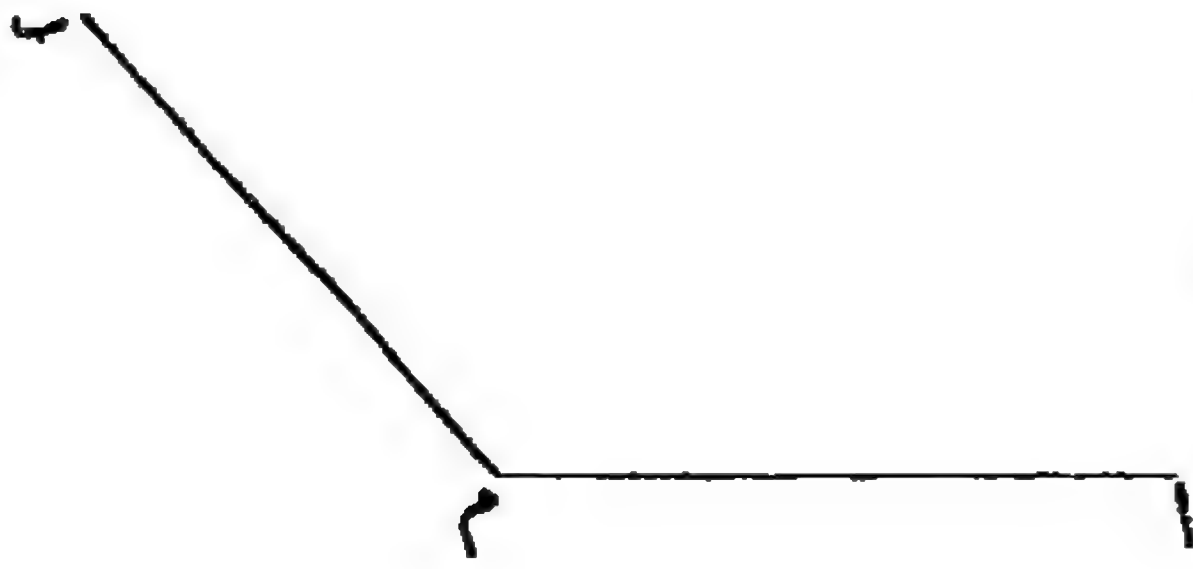
تنقسم الزاوية القائمة الى ٩٠ قسما متساوية كل منها يسمى درجة (°) وتنقسم الدرجة الى ٦٠ قسما متساوية كل منها يسمى دقيقة (′) وتنقسم الدقيقة الى ٦٠ قسما متساوية كل منها يسمى ثانية (″) فان دار المستقيم $ج د$ (في الشكل المقدم) حول نقطة $م$ من الوضع $ا م$ الى الوضع $ب م$ فانه يدور بقدر زاويتين قائمتين أي بقدر ١٨٠°

ولو دار المستقيم m دورة تامة حول النقطة المذكورة مبتدئاً من الوضع m a حتى عاد إليه فإنه قد دار بقدر أربع زوايا قوائم أو بقدر 360°



٨ يقال للزاوية إذا كانت أقل من القائمة حادة أى أن مقدار

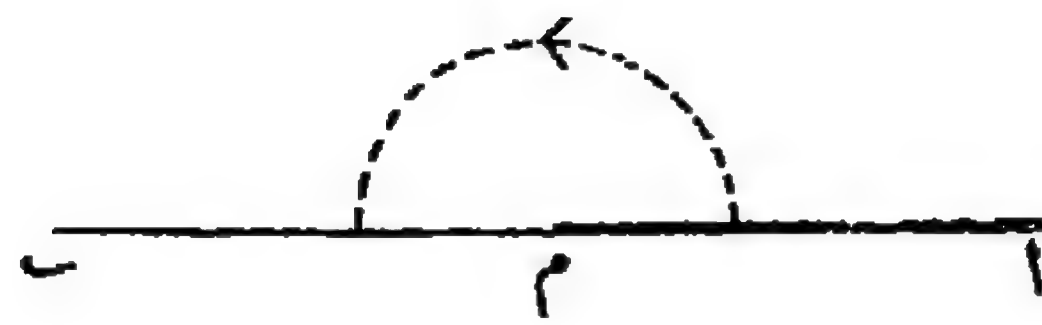
الزاوية الحادة أقل من 90°



٩ ويقال للزاوية إذا كانت أكبر من القائمة وأصغر

من قائمتين منفرجة أى أن مقدار الزاوية المنفرجة

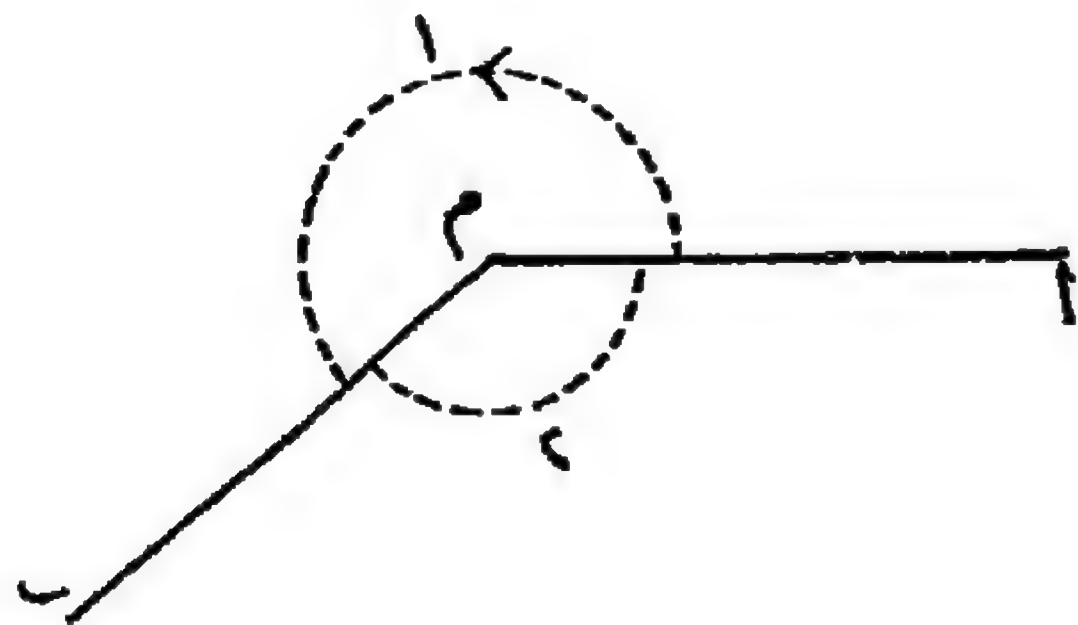
محصور بين 90° و 180°



١٠ إذا دار أحد ضلعي زاوية مثل m b حتى صار على

استقامة الضلع الآخر a فإن الزاوية الحادثة يقال لها مستقيمة

وعليه فالزاوية المستقيمة = زاويتين قائمتين = 180°



١١ إذا كانت الزاوية أكبر من قائمتين وأصغر من

أربع قوائم تسمى زاوية منعكسة

وعليه فمقدار الزاوية المنعكسة ينحصر بين 180° و 360°

ملاحظة — إذا تلاقي مستقيمان في نقطة حدث من تلاقيهما زاويتان أحدهما أكبر من قائمتين والأخرى أصغر من قائمتين وهذا ناشئ من اعتبار دوران الضلع m b حول نقطة m بعد أن كان منطبقاً على m a

فالدوران إما أن يتبدى من أعلى m a الى الجهة اليسرى او من أسفله الى الجهة اليمنى

فلو تصورنا ان m b دار حول m من الوضع m a الى الجهة اليسرى كما هو مبين في الشكل المتقدم

برقم ١ وصار في الوضع الذى هو فيه فإنه يكون بذلك قد دار بقدر زاوية أكبر من قائمتين

أما اذا دار من الوضع m a الى الجهة اليمنى وصار في الوضع الذى هو فيه كما هو مبين في الشكل المذکور

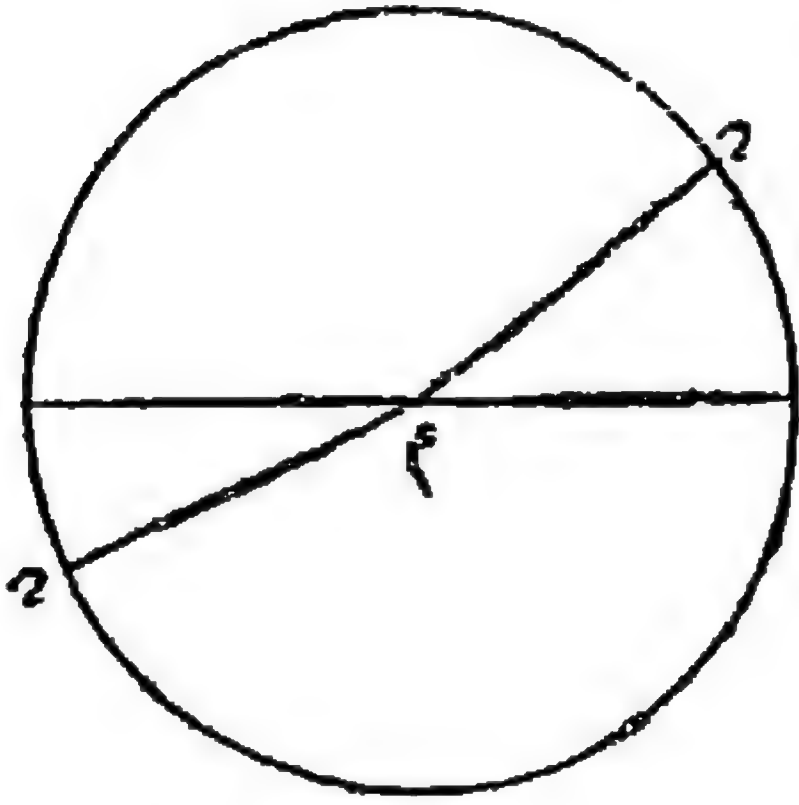
برقم ٢ فإنه بذلك يكون قد دار بقدر زاوية أقل من قائمتين

وعند الاطلاق لا يعتبر من الزاويتين الحادتين من تلاقي مستقيمين بآخر إلا ما كانت أقل من قائمتين

فان أريدت الأخرى وجب ذكر ما يدل على ذلك

١٢ الشكل المستوي هو جزء من السطح المستوي محدود بخط أو أكثر

١٣ الدائرة هي شكل مستو محاط بخط حادث من حركة نقطة على بعد واحد دائما من نقطة أخرى ثابتة

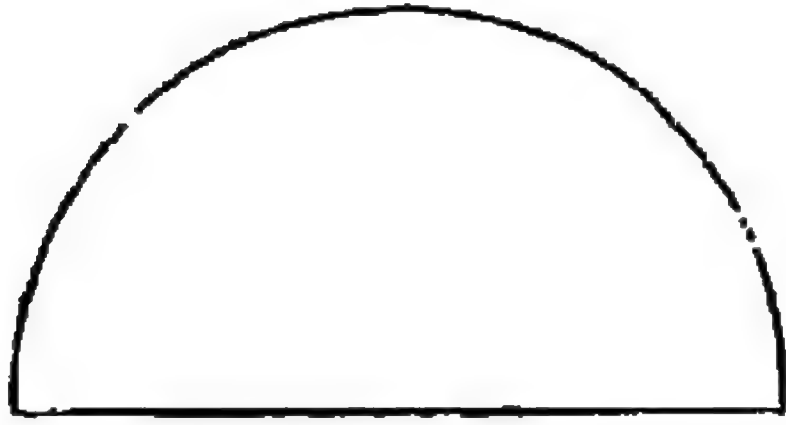


فمثلا النقطة م ثابتة و د متحركة حول م على بعد واحد دائما منها فالشكل الناتج من ذلك يسمى دائرة وتسمى النقطة الثابتة بمركز الدائرة والخط المحدد للدائرة بمحيطها

١٤ نصف قطر الدائرة مستقيم خارج من المركز ومنتته بالمحيط وينتج من هذا التعريف أن أنصاف أقطار الدائرة متساوية

١٥ قطر الدائرة هو مستقيم مار بالمركز وطرفاه على المحيط

١٦ قوس الدائرة جزء من محيطها



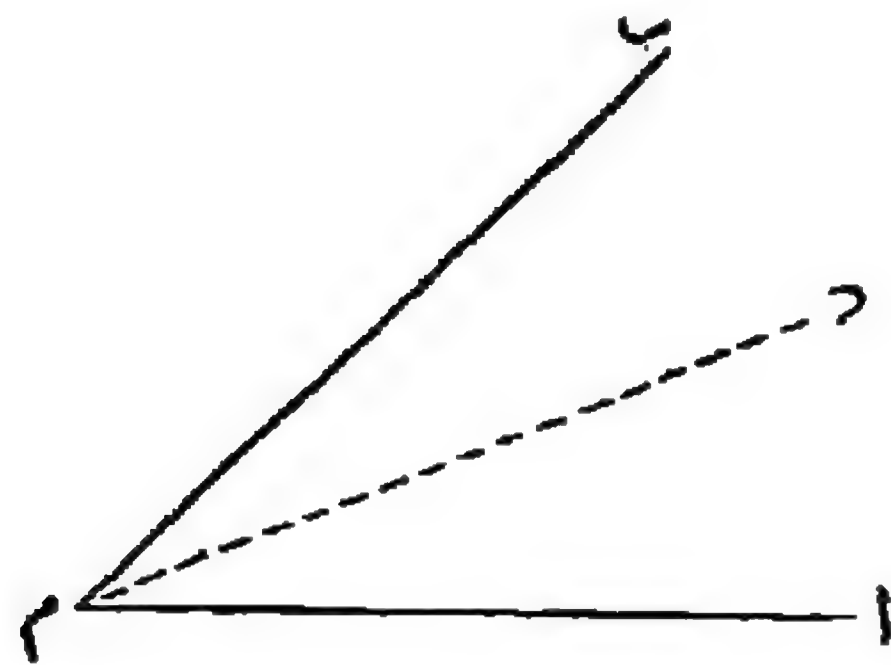
١٧ نصف الدائرة هو شكل محدود بقطر الدائرة وجزء المحيط المنتهي بطرفي هذا القطر

١٨ تنصيف الشيء تقسيمه الى جزأين متساويين

بديهية ١ — اذا تحركت نقطة مثل م من ا الى ب على اتجاه المستقيم ا ب فانها لا بد أن تأخذ وضعاً واحداً تقسم فيه المستقيم ا ب الى قسمين متساويين أى ان كل مستقيم محدود فيه نقطة تنصيف واحدة



بديهية ٢ — اذا كان المستقيم م د منطبقاً على ا م ودار حول النقطة م من الوضع ا م حتى انطبق على م ب فانه لا بد أن يأخذ وضعاً واحداً يقسم فيه الزاوية ا م ب الى قسمين متساويين أى أنه يمكن اعتبار أن لكل زاوية مستقيماً واحداً ينصفها



العمليات المسلم بصحة فرضها

ينتج من البديهيات المذكورة في ٧ و ٦ و ١٨ أنه يمكن اجراء العمليات الآتية

أولاً — اقامة عمود على مستقيم معلوم من أى نقطة عليه

ثانياً — ايجاد نقطة منتصف مستقيم محدود

ثالثاً — ايجاد المستقيم المنصف لزاوية معلومة

الانطباق والتساوى

بديهية — الأشياء التي يمكن أن ينطبق كل منها على الآخر انطباقا تاما متساوية ويؤخذ من ذلك أنه لأجل مقارنة خطين أوزاويتين أو أى شكلين كل بالآخر يمكن أن نتصور رفع أحدهما من وضعه الأصلي بشرط ألا يحدث فيه أى تغير سواء في صورته أو مقداره وتطبيقه على الثانى فان انطبق الشئان كل على الآخر تمام الانطباق كانا متساويين وتسمى هذه العملية بعملية التطبيق

القضايا المسلم بصحتها

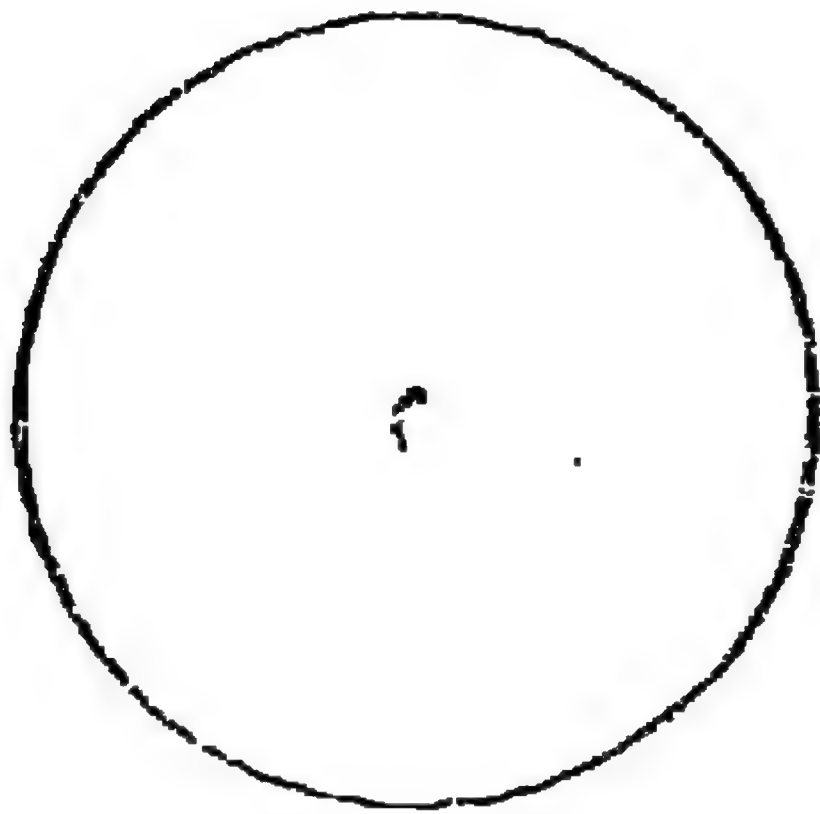
يلزم استعمال آلات خاصة لرسم الأشكال الهندسية وإنشائها واللازم استعماله منها لرسم الأشكال التي بهذا الكتاب هو المسطرة والبرجل

والقضايا الآتية تستدعى استعمال هاتين الآتين وهما كافيتان لإجراء ما تستلزمه كل منها وهما هي

الأولى — يمكن مد مستقيم من أى نقطة مفروضة الى أى نقطة أخرى معلومة

الثانية — يمكن مد مستقيم محدود على استقامته الى أن يبلغ أى طول

الثالثة — يمكن رسم دائرة من أى نقطة نعتبرها مركزا وبأى نصف قطر مهما كان طوله



ملاحظة ١ — يؤخذ من القضية الثالثة أنه لو أخذ طول

أى مستقيم معلوم مثل ح د بواسطة البرجل وركز في أى نقطة مفروضة مثل م فإنه يمكن رسم دائرة نصف قطرها مساو للمستقيم المعلوم ح د

وبعبارة أخرى يقال أنه بواسطة البرجل يمكن نقل الأبعاد من أى

جهة الى أخرى

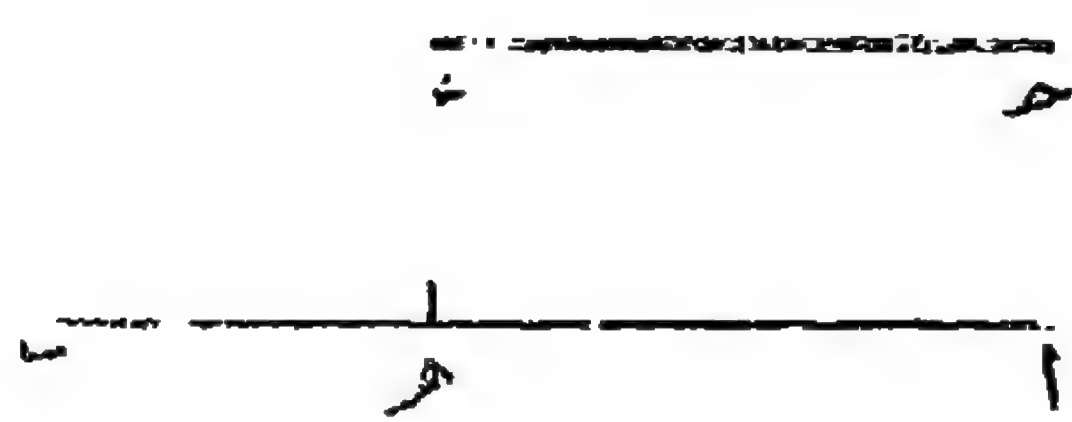
ملاحظة ٢ — وعلى ذلك ان فرضنا أن المستقيم ا ب

كبر من المستقيم ح د يمكننا أن نأخذ على ا ب البعد

ا ه مساويا ح د لأنه اذا ركز بالبرجل في نقطة ا وبعده

يساوى ح د رسم قوس يقطع ا ب في ه فمن الواضح

أن ا ه يساوى ح د



تمهيد

١ الهندسة المستوية تبحث في خواص الخطوط والأشكال المرسومة على السطح المستوي

٢ وينقسم هذا العلم الى عدة أبحاث كل منها يسمى دعوى والدعوى نوعان نظرية وعملية فالنظرية تتطلب اقامة البرهان على صحة عبارة هندسية

والعملية تتطلب انشاء عمل هندسى ك رسم خط له صفة خاصة او شكل بصورة معينة

٣. وتركب الدعوى من الأجزاء الآتية

١ — المنطوق العام ويبين الغرض من الدعوى بعبارة عامة

٢ — المنطوق الخاص ويتضمن البيان السابق بعبارة خاصة يرجع في ايضاحها الى شكل يسهل به ادراك البرهان

٣ — العمل وهو رسم المستقيمت أو الدوائر التي يحتاج اليها لحل الدعوى العملية أو اثبات الدعوى النظرية

٤ — البرهان وهو الذى به تبين صحة حل العملية أو صدق النظرية

٤ النتيجة وهى حقيقة مستخرجة من دعوى قام الدليل على صحتها فتلتحق عادة بها ولا تحتاج فى الغالب الى برهان جديد

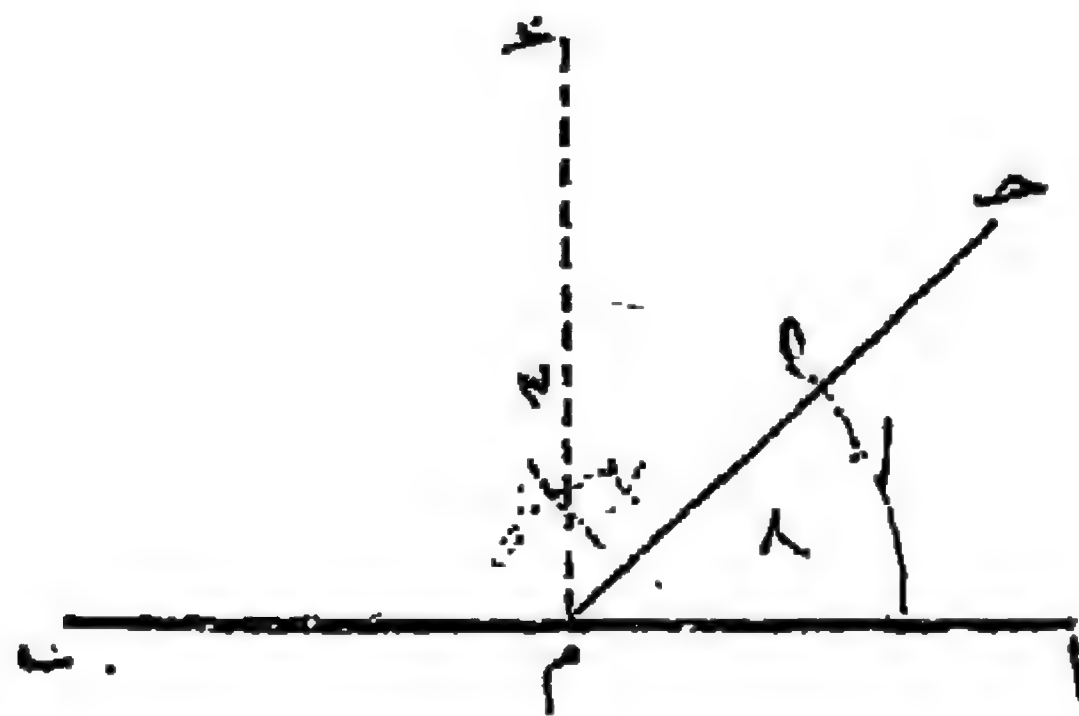
٥ والرموز الآتية مستعملة فى هذا الكتاب

الرمز	المدلول
∴	اذن
=	يساوى
∠	زاوية
△	مثلث
∩	زاوية قائمة

في الخطوط والزوايا

نظرية ١

مجموع الزاويتين المتجاورتين الحادتين من تلاقي مستقيم بآخر وفي جهة واحدة منه يساوي زاويتين قائمتين



إذا فرضنا أن المستقيم c يصنع بتلاقيه مع المستقيم a في نقطة m الزاويتين المتجاورتين
 $a + b = c$
 فانه يطلب اثبات ان

$$a + b = \text{زاويتين قائمتين}$$

لذلك نفرض اقامة العمود d على a و b

$$\text{البرهان} \quad a + b = c = d + e + f + g + h + i + j + k + l + m + n + o + p + q + r + s + t + u + v + w + x + y + z$$

$$\text{كذلك} \quad a + b = c = d + e + f + g + h + i + j + k + l + m + n + o + p + q + r + s + t + u + v + w + x + y + z$$

$$\therefore a + b = c = d + e + f + g + h + i + j + k + l + m + n + o + p + q + r + s + t + u + v + w + x + y + z$$

= زاويتين قائمتين وهو المطلوب

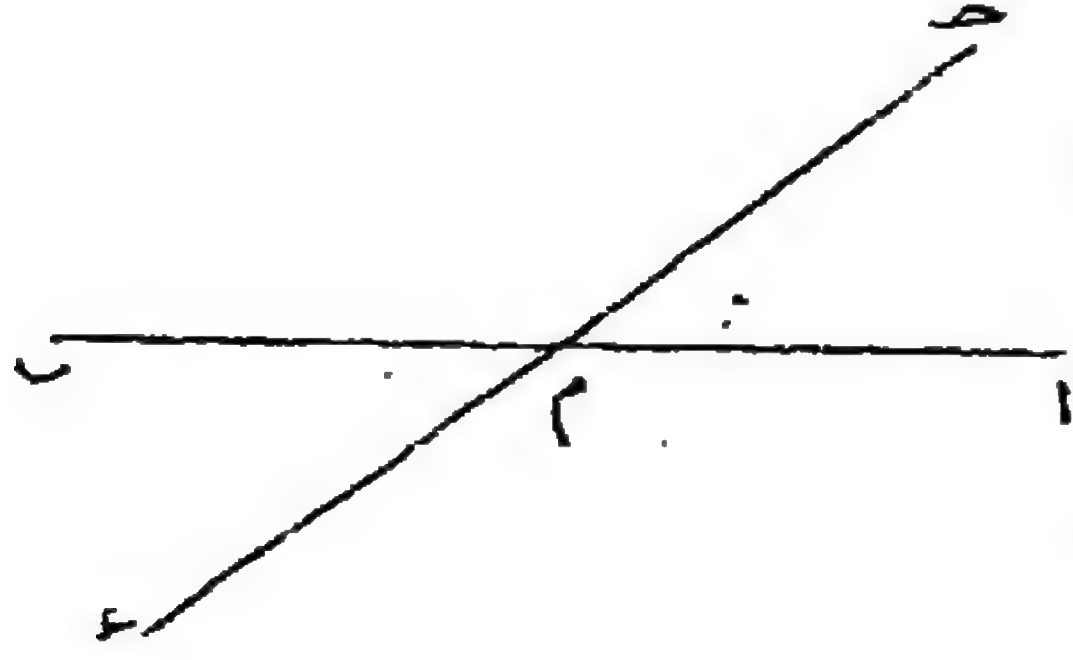
برهان آخر بواسطة الدوران

لو تصورنا أن المستقيم c كان منطبقاً على المستقيم a وأنه أخذ يدور حول m من الوضع a الى أن انطبق على b فانه بذلك يدور في الحقيقة بقدر زاويتين قائمتين لأن a و b خط مستقيم

ومن حيث ان مقدار الزاويتين $a + b = c$ يساوي مقدار دوران c حول m من الوضع a الى الوضع b

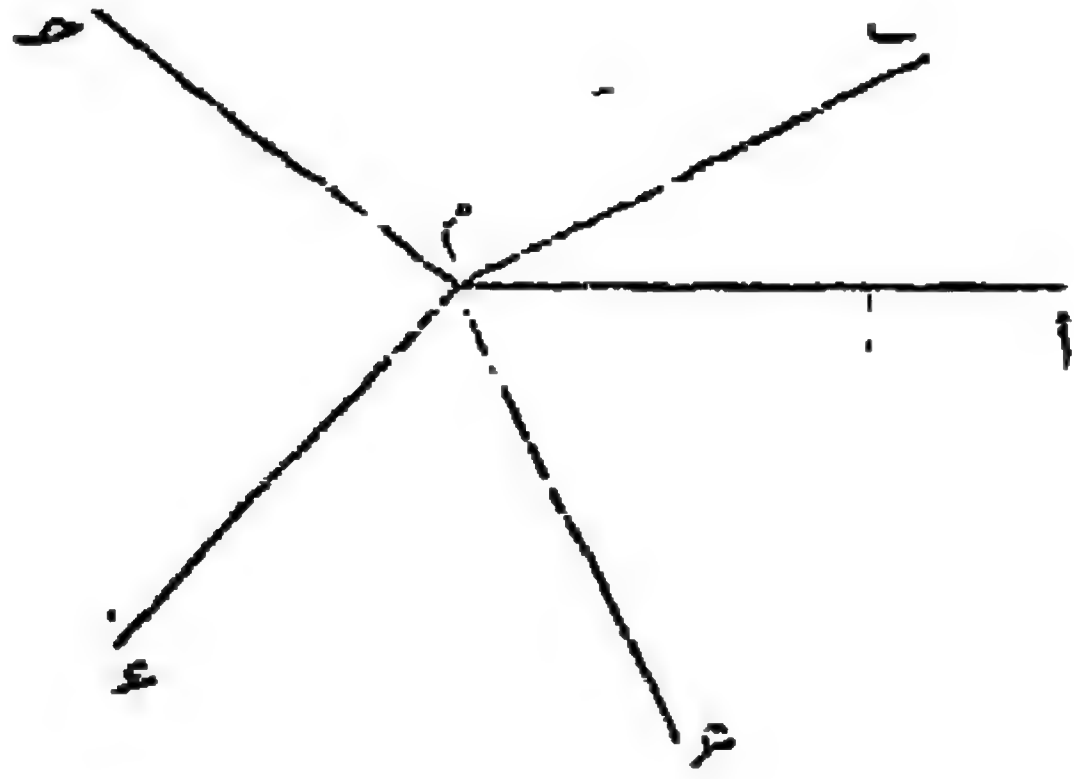
وهذا المقدار يساوي زاويتين قائمتين

$$\therefore a + b = c = \text{زاويتين قائمتين}$$



نتيجة ١ — اذا تقاطع مستقيمان فمجموع الزوايا الأربع
الحادثة من تقاطعهما يساوي أربع قوائم
أي أن

$$ج + ا + ب + د = ٤ م$$



نتيجة ٢ — اذا مدت عدة مستقيمت من نقطة واحدة
فمجموع الزوايا الحادثة المأخوذة واحدة بعد الأخرى
يساوي أربع قوائم

لأنه لو مد مستقيم من النقطة م ودار حولها وصنع على
الترتيب الزوايا ا م ب م ج م د م هـ م و م ح م
فانه يتم دورة كاملة وبذلك يدور بقدر أربع زوايا قوائم

تعريفان

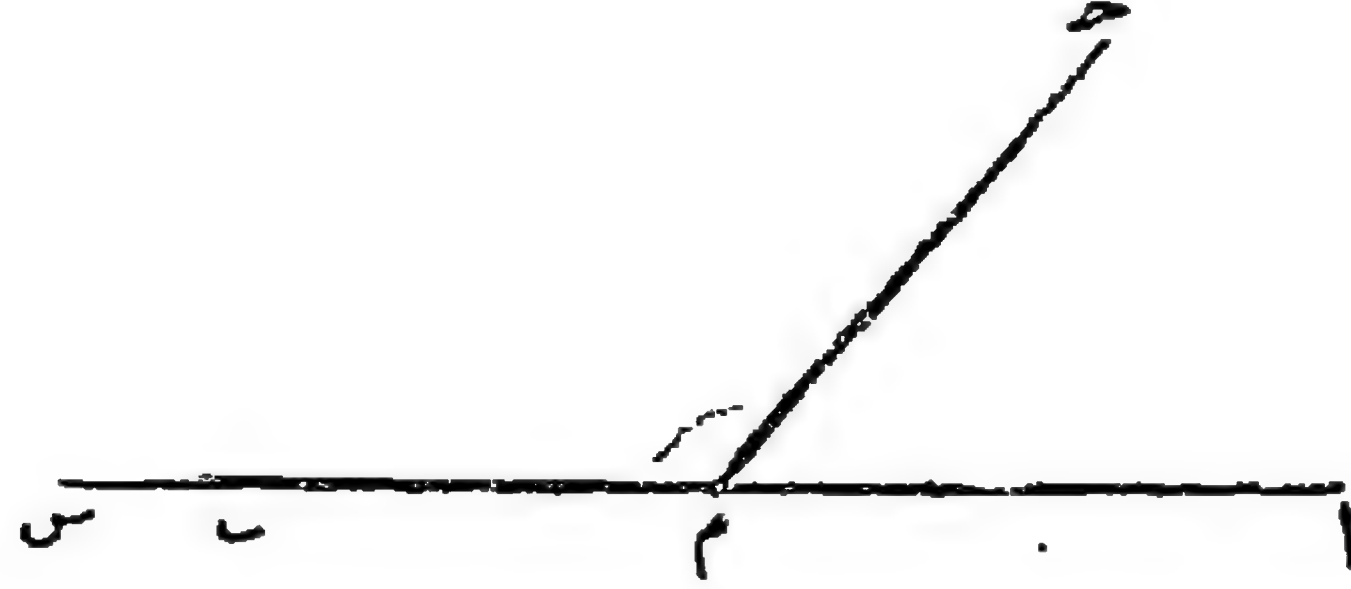
١ يقال للزاويتين اللتين مجموعهما يساوي قائمتين انهما متكاملتان وان كلا منهما مكمل للآخرى
ففي شكل نظرية (١) الزاويتان ا م ب م ج م د م هـ م و م ح م متكاملتان
وكذلك زاوية ١٢٣° مكمل لزاوية ٥٧°

٢ يقال للزاويتين اللتين مجموعهما يساوي قائمة واحدة انهما متتامتان وان كلا منهما متممة للآخرى
ففي شكل نظرية (١) الزاوية د م ح م متتمة للزاوية ا م ب م ج م
وكذلك زاوية ٣٤° متممة لزاوية ٥٦°

نتيجة ٣ — أولاً — مكملات الزاوية الواحدة متساوية
ثانياً — متممات الزاوية الواحدة متساوية

نظرية ٢

إذا كان مجموع أي زاويتين متجاورتين مساويا قائمتين كان ضلعاهما المتطرفان على استقامة واحدة



إذا فرضنا أن مجموع الزاويتين المتجاورتين $\angle م ا ح$ و $\angle م ب ح$ يساوي قائمتين فإنه يطلب اثبات أن ضلعيهما المتطرفين $م ا$ و $م ب$ على استقامة واحدة لذلك نمد $م ا$ على استقامته الى $س$ ويكفى أن نثبت أن

$م س$ منطبق على $م ب$

البرهان — من حيث أن $م ا$ من مستقيم بالعمل.

(نظرية ١)

$\therefore \angle م س ح = \angle م ب ح$ تكمل $\angle م ا ح$

بالفرض

ولكن $\angle م ب ح = \angle م س ح$ تكمل $\angle م ا ح$

$\therefore \angle م س ح = \angle م ب ح$

\therefore ينطبق المستقيمان $م س$ و $م ب$

بالعمل

ومن حيث أن $م س$ على استقامة $م ا$

وهو المطلوب

يكون $م ب$ على استقامة $م ا$

تمارين

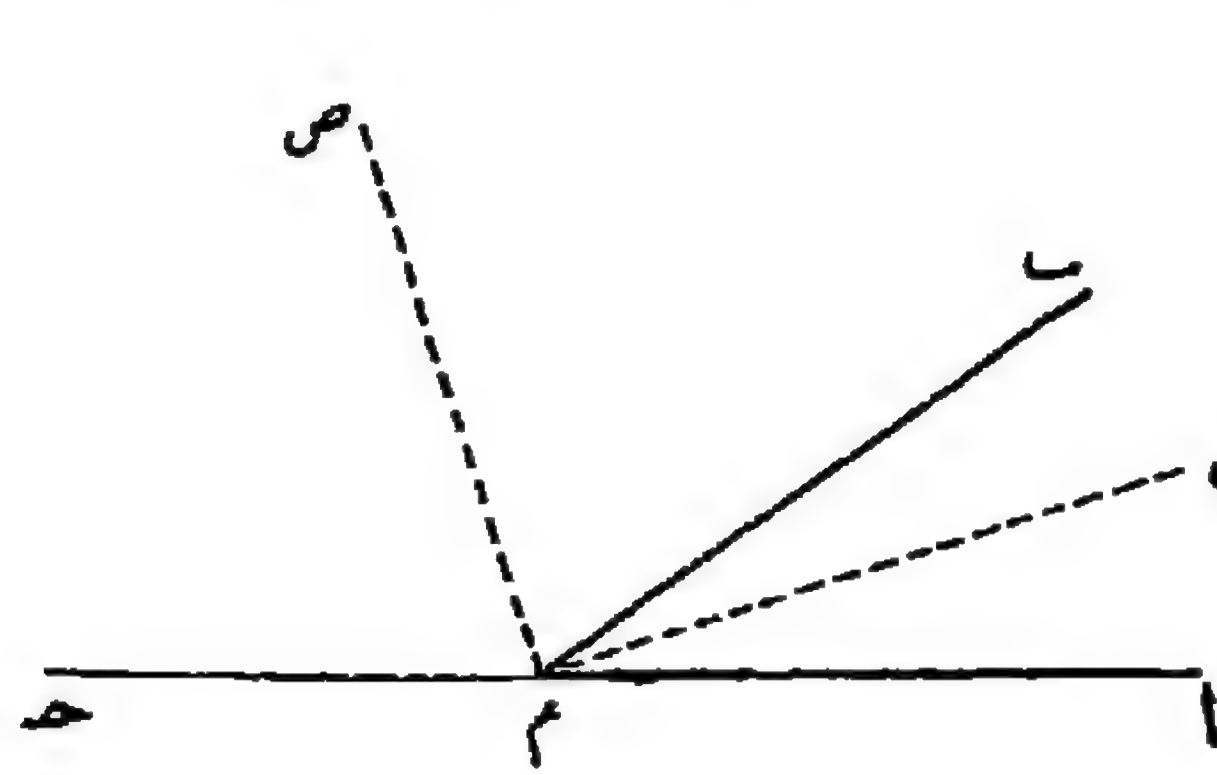
١ المطلوب إيجاد مكملات الزوايا الآتية وهي نصف زاوية قائمة \angle أربعة أثلاث قائمة \angle 149° 83° 101° 156°

٢ المطلوب إيجاد متممات الزوايا الآتية وهي خمسا زاوية قائمة \angle 27° 16° 38° 30° 41°

٣ اذا تقاطع مستقيمان وكانت احدى الزوايا الأربع الحادثة قائمة كانت كل من الثلاث الأخرى قائمة كذلك

٤ في المثلث $\triangle ABC$ الزاويتان $\angle A$ و $\angle B$ متساويتان برهن على أنه لو مد الضلع BC على استقامته في كل من اتجاهيه لحدث أن الزاويتين الخارجيتين الحادتين متساويتان

٥ في المثلث $\triangle ABC$ الزاويتان $\angle A$ و $\angle B$ متساويتان برهن على أنه لو مد كل من الضلعين AB و AC على استقامته تحت الضلع BC لحدث أن الزاويتين الخارجيتين الحادتين متساويتان



تعريف — اذا مد أحد ضلعي زاوية على استقامته من جهة الرأس ثم نصفت هذه الزاوية بمستقيم ونصفت الزاوية المجاورة الحادثة بمستقيم آخر يقال للمستقيم الأول المنصف الداخل لهذه الزاوية والثاني المنصف الخارج لها

ففي الشكل يقال ان CM س المنصف الداخل للزاوية المعلومة $\angle A$ و BN و AN ص المنصف الخارج لها

٦ برهن على أن منصفى زاويتين متجاورتين حادتين من تلاقي مستقيم بأخرى يحصران بينهما زاوية قائمة وبعبارة أخرى المنصفان الداخل والخارج لزاوية ما متعامدان

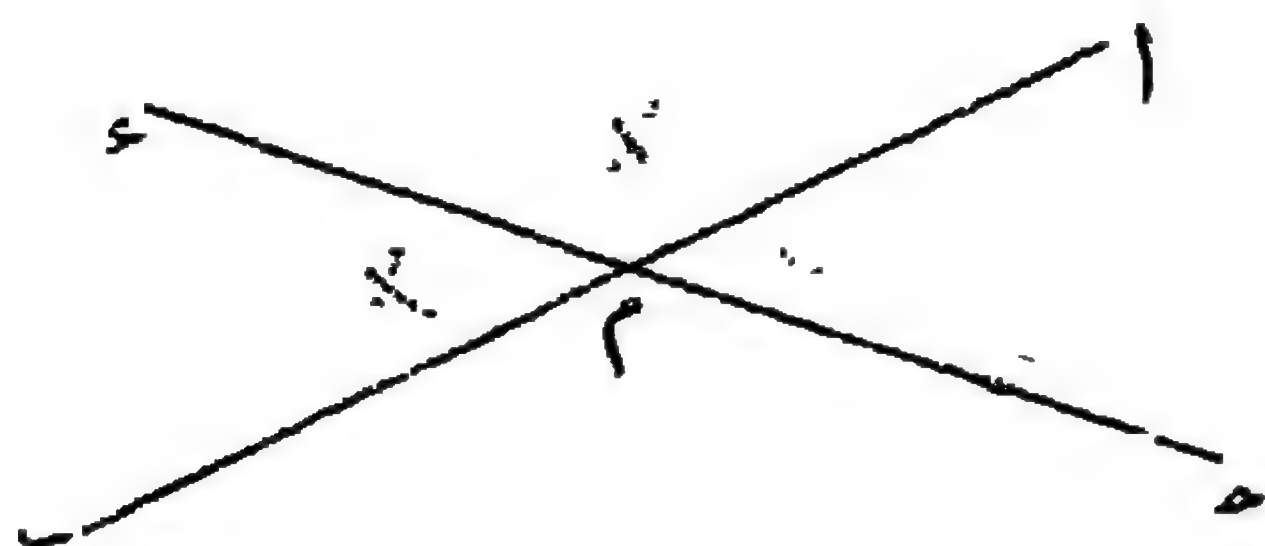
٧ برهن في الشكل المتقدم على ان $\angle A$ و $\angle B$ متتامتان

٨ برهن على أن الزاويتين $\angle A$ و $\angle B$ متتامتان وأن الزاويتين $\angle A$ و $\angle B$ متتامتان أيضا

٩ اذا كانت الزاوية $\angle A = 35^\circ$ فما مقدار $\angle B$

نظرية ٣

إذا تقاطع مستقيمان فكل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان



إذا فرضنا أن
 ا ب ح د تقاطعا في م
 فانه يطلب إثبات أولا أن
 د ا م ح = د م ب
 ثانيا أن
 د ا م ز = د م ب

البرهان — من حيث ان المستقيم ا م يلاقى المستقيم ح د في م
 \therefore د ا م ح + د ا م ز = د م ب
 أي أن
 د ا م ح تكمل د ا م ز
 وكذلك
 د م يلاقى ا ب في م
 \therefore د م ب + د م ز = د م ب
 أي أن
 د م ب تكمل د ا م ز
 وعليه فكل من د ا م ح و د م ب تكمل زاوية واحدة هي ا م ز
 \therefore د ا م ح = د م ب

وبالطريقة نفسها يبرهن على أن

د ا م ز = د م ب وهو المطلوب

برهان آخر بطريقة الدوران

إذا تصوّرنا دوران المستقيم ا م ب حول النقطة م حتى ينطبق الجزء ا م على م ح يلزم أن ينطبق الجزء م ب على م ز لأن كلا من ا م ب و م ح د مستقيم
 وعلى ذلك فمقدار الدوران اللازم لانعدام الزاوية ا م ح هو عين مقدار الدوران اللازم لانعدام الزاوية م ب ز

\therefore د ا م ح = د م ب

تمارين على الزوايا

(مسائل عددية)

١٠٦ ١٤ وما هو الزمن الذي يستغرقه العقرب المذكور في دورانه زاوية مقدارها 96° وأخرى مقدارها 222°

٢ إذا ضبطت ساعة على الظهر فما مقدار كل من الزوايا التي دار فيها عقرب الساعات اذا كانت

الساعة أولا ٤٥ ٣ وثانيا ١٠ ٥

وما هي الساعة اذا دار هذا العقرب في زاوية مقدارها $172\frac{1}{4}^\circ$

٣ تدور الأرض دورة تامة حول محورها في ٢٤ ساعة مامقدار الزاوية التي تدور فيها الأرض
دقيقه ساعة
في ٢٠ ٣ وما هو الزمن الذي تستغرقه في دورانها في زاوية مقدارها ١٣٠°

٤ في شكل نظرية ٣

(أولاً) إذا كانت $د م = ٣٥$ فما مقدار كل من الزوايا $ا م د$ و $ب م د$ بدون أن تقاس.

(ثانياً) إذا كان مجموع الزاويتين a و b $> 90^\circ$ فمقدار كل من الزاويتين a و b $> 90^\circ$

(ثالثاً) إذا كان مجموع الزوايا $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ فما مقدار كل من الزوايا الأربع المجتمعة في α

(مسائل نظرية)

هـ اذا فرضت نقطة مثل م على المستقيم المعلوم ا ب ورسم منها المستقيمان م ح و م د في كل من جهتيه على شرط أن $\angle م ب د = \angle م د ح$ فانه يراد لإثبات أن م ح يكون على استقامة د م

٦ إذا تقاطع المستقيمان ab و c في نقطة m وكان m من منتصف ab و c فانه يراد إثبات أن امتداد c من m ينصف ab و

٧ إذا تقاطع المستقيمان AB و CD في نقطة M وكان M من منتصف AD و M ب 6 M ص منتصف AC فإنه يراد إثبات أن المنصفين M 6 M $ص$ على استقامة واحدة

(٨) اذا فرض أن m من ينصف $\Delta m a$ وطوى الجزءان m ب 6 س m a أحدهما على الآخر حول m س فان المستقيم m ب ينطبق على a m .

وفي أى وضع يكون المستقيم m بالنسبة الى المستقيم n اذا كان

(أولاً) د ا م س اکبر ہیں د س م م

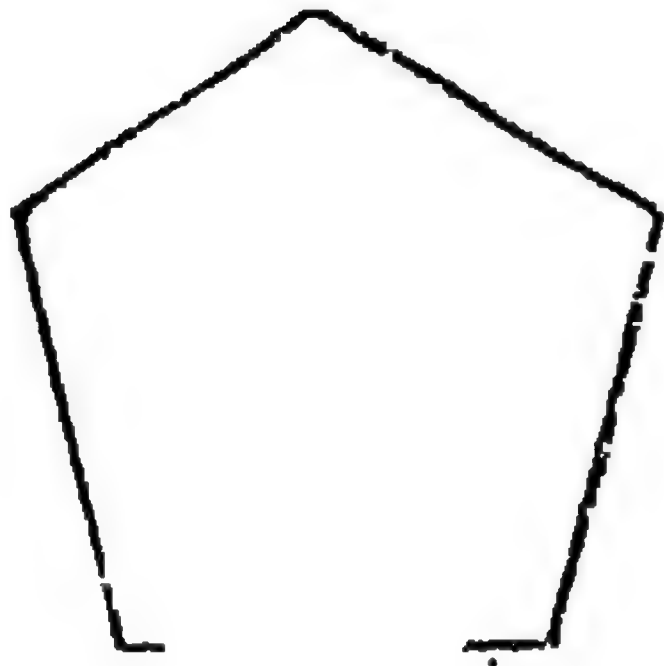
(ثانياً) د ا م م اصغر من ا د م م م

- ٩ المستقيمان AB و CD متقاطعان في M ومتعامدان برهن على أنه لو جعلنا A ب حدا فاصلا لجزأى الشكل وطوينا حوله أحد الجزأين على الآخر فان المستقيم M ينطبق على M و
- ١٠ اذا رسمنا المستقيم A M ب على قطعة من الورق ثم طوينا جزأيا من نقطة M على شرط أن ينطبق A M على M ب فانه يراد لإثبات أن الخط الحادث من طى الورقة يكون عمودا على A B

في المثلثات

- ١ علمنا أن الشكل المستوي هو جزء من السطح المستوي محدود بخط أو أكثر ويسمى مجموع الخطوط التي تحدد الشكل بمحيطة ويسمى مقدار السطح المحصور في المحيط بمساحة الشكل

- ٢ الأشكال المستقيمة الأضلاع هي المحدودة بخطوط مستقيمة
- ٣ المثلث هو شكل مستوي محدود بثلاثة مستقيمت
- ٤ الشكل الرباعي شكل مستوي محدود بأربعة مستقيمت

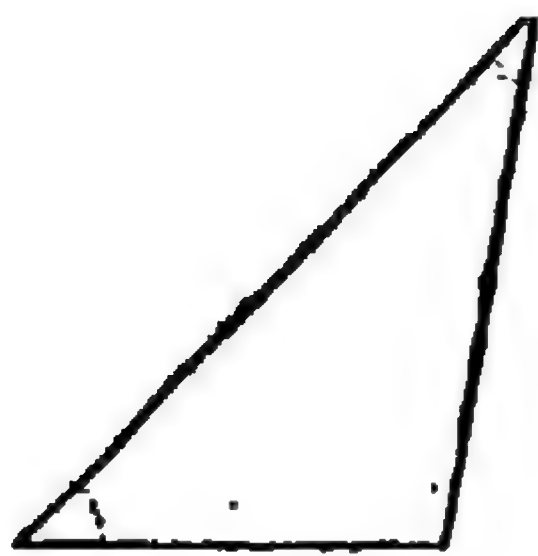


- ٥ كثير الأضلاع أو المضلع هو شكل مستوي محدود بأكثر من أربعة مستقيمت

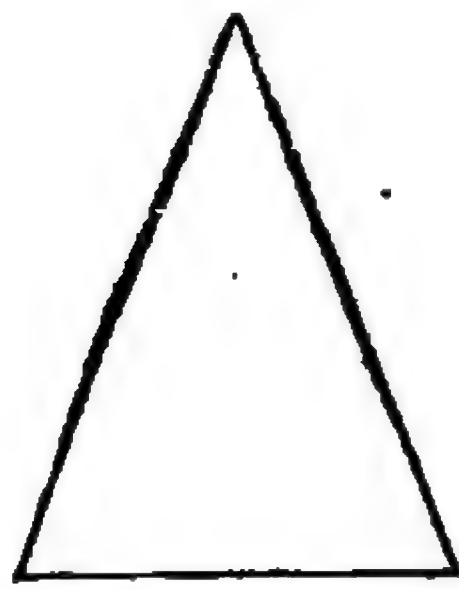
- ٦ ويقال لمستقيم الأضلاع انه متساوى الأضلاع اذا تساوت أضلاعه ومتساوى الزوايا اذا تساوت زواياه

ومتتظم اذا كان متساوى الأضلاع والزوايا

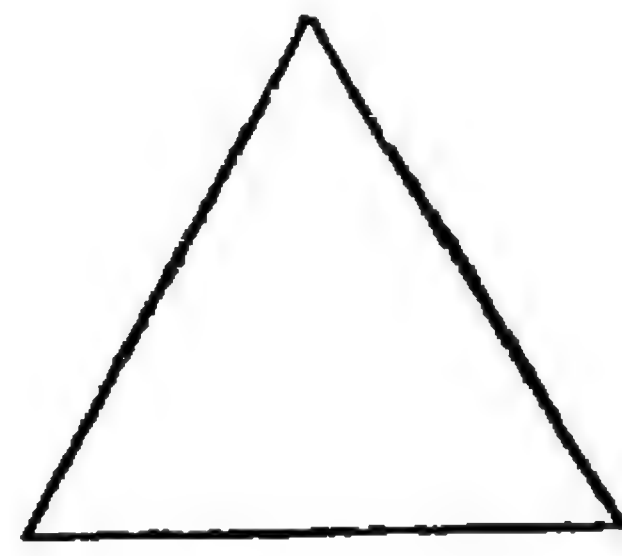
- ٧ والمثلث بالنسبة الى أضلاعه اما أن يكون متساوى الأضلاع اذا تساوت أضلاعه ومتساوى الساقين اذا تساوى فيه ضلعان ومختلف الأضلاع اذا كانت أضلاعه مختلفة الطول



مثلث مختلف الأضلاع

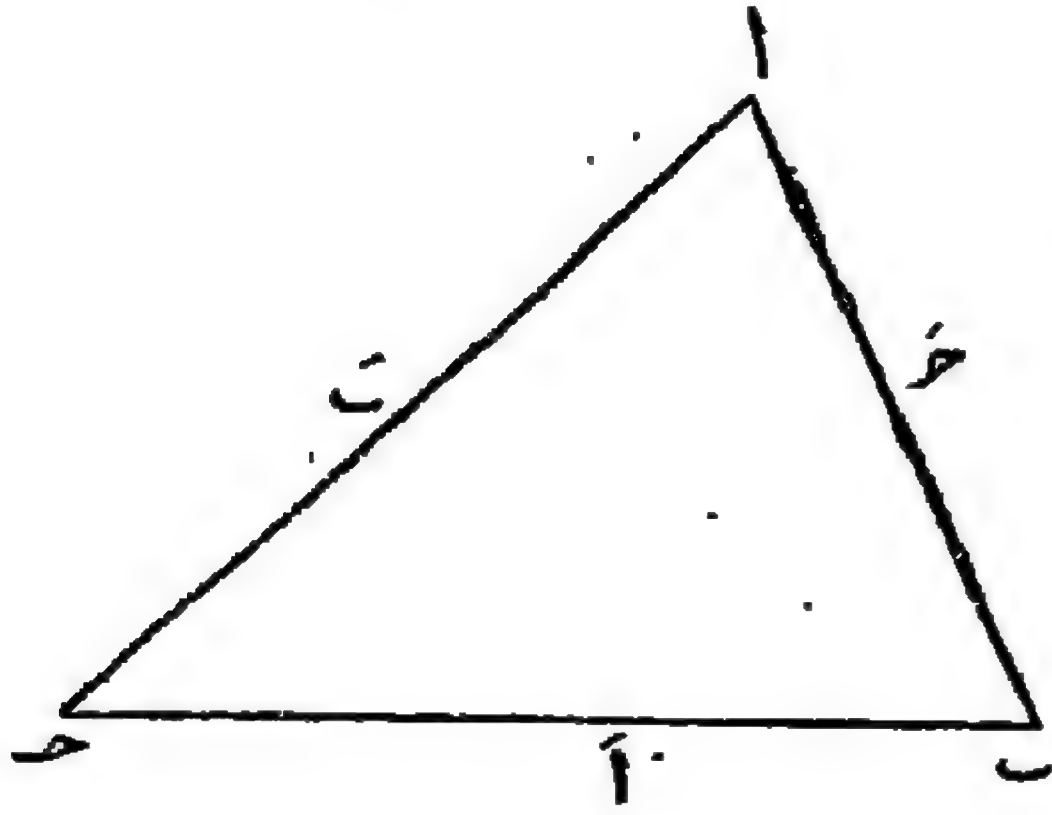


مثلث متساوى الساقين



مثلث متساوى الأضلاع

ولأجل الاختصار يعبر عن مقدار كل زاوية في المثلث بالحرف الدال على رأسها ففي المثلث ABC يعبر عن مقادير زواياه الثلاث بالحروف A B C



وكثيرا ما يرمز بالحروف A B C لأطوال أضلاع المثلث ويسمى الضلع باسم الزاوية التي تقابله فيسمى الضلع a المقابل A بالضلع b المقابل B بالضلع c المقابل C بالضلع a المقابل A بالضلع b المقابل B بالضلع c المقابل C

ويمكن اعتبار أى رأس من رؤوس زوايا المثلث رأسا له. وحينئذ يكون الضلع المقابل لهذا الرأس قاعدة له. وإذا كان المثلث متساوي الساقين كان رأسه عادة نقطة تقاطع ساقيه المتساويين وزاوية الرأس الزاوية المحصورة بين الساقين المتساويين

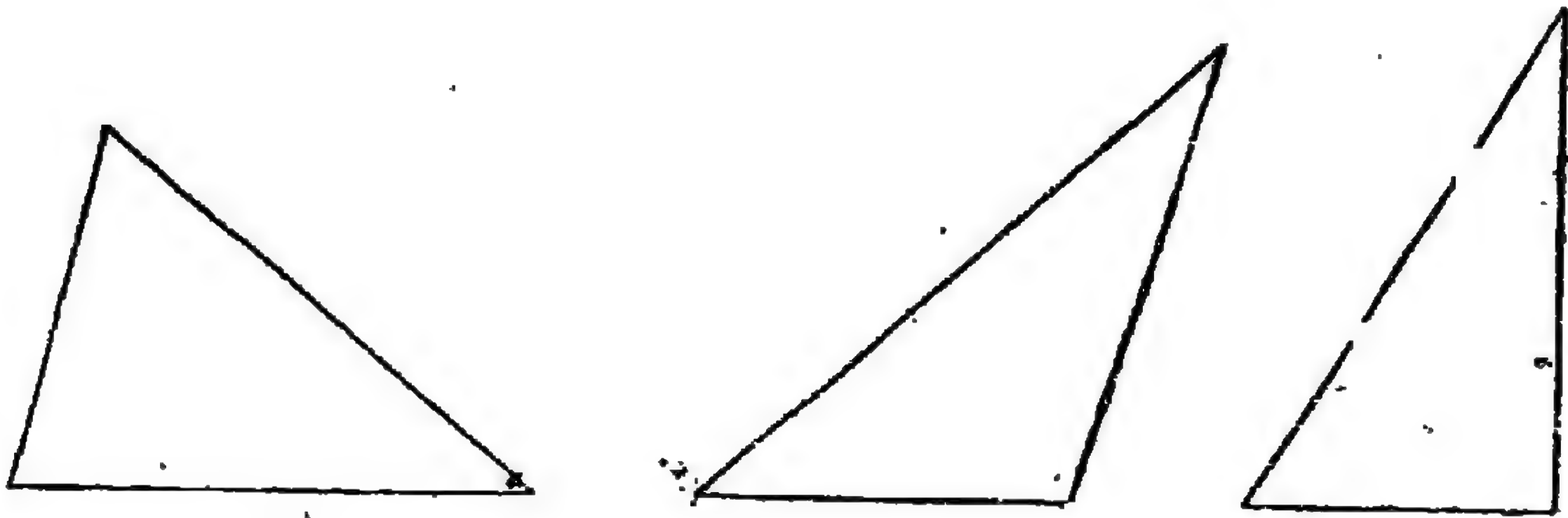
٨ والمثلث بالنسبة الى زواياه إما أن يكون

قائم الزاوية إذا كانت إحدى زواياه قائمة

ومفرج الزاوية إذا كانت إحدى زواياه مفرجة

وحاد الزوايا إذا كانت زواياه الثلاث حادة

وسيتبين في (نظرية ٨ نتيجة ٢) أنه يجب أن يكون في كل مثلث زاويتان حادتان على الأقل



مثلث حاد الزوايا

مثلث مفرج الزاوية

مثلث قائم الزاوية

ويسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية وتره

٩ المستقيم الواصل بين رأس المثلث ومنتصف قاعدته يسمى بالمستقيم المتوسط أو بنصف المثلث

المقارنة بين مثلثين

المقارنة بين مثلثين إما أن تكون من حيث مساحتهما أو من حيث الأجزاء الستة لكل منهما وأجزاء المثلث الستة هي أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث

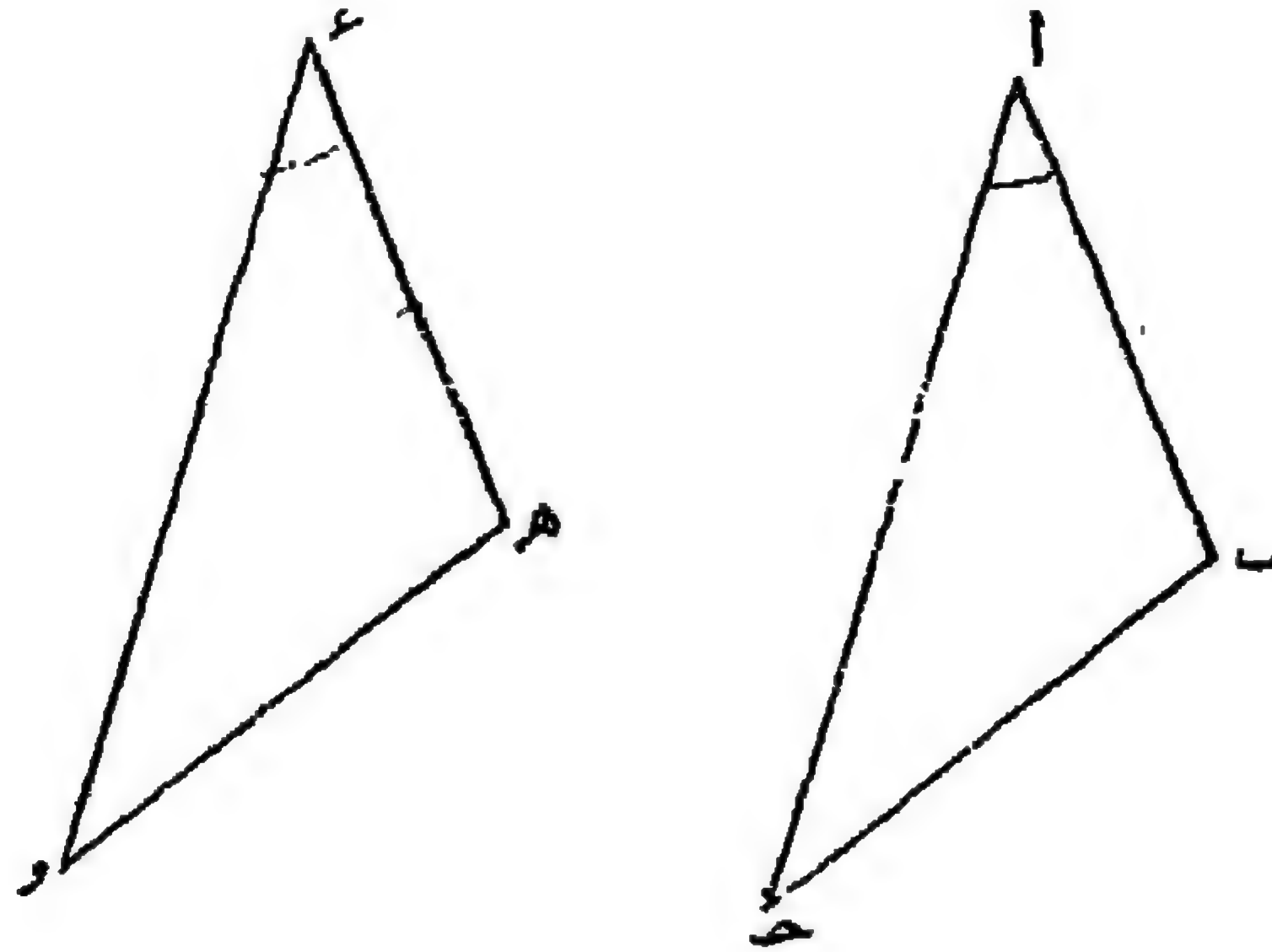
يتساوى المثلثان من عامة الوجوه إذا أمكن انطباق أحدهما على الآخر انطباقاً تاماً وفي هذه الحالة يكون كل جزء في المثلث الأول مساوياً لنظيره (أى الذى ينطبق عليه) فى المثلث الثانى ويكون المثلثان متساويين فى المساحة

والأضلاع المتناظرة فى المثلثين المتساويين هى التى تقابل زوايا متساوية والزوايا المتناظرة فيهما هى التى تقابل أضلاعاً متساوية

ويقال للمثلثين اللذين يمكن أن تنطبق جميع أجزاء أحدهما على جميع أجزاء الآخر انهما متطابقان

نظرية ٤

ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى في كل ضلعان والزاوية المحصورة بينهما نظائرها في الآخر



اذا كان في المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$

$$AB = DE$$

$$\angle A = \angle D$$

والزاوية المحصورة $\angle B = \angle E$ الزاوية المحصورة $\angle C = \angle F$

فانه يطلب إثبات ان $\triangle ABC = \triangle DEF$ من عامة الوجود أى أنهما ينطبقان أحدهما على الآخر تمام الانطباق

البرهان — نطبق $\triangle ABC$ على $\triangle DEF$

على شرط أن النقطة A تقع على النقطة D

ويأخذ الضلع AB الاتجاه DE

ومن حيث ان $AB = DE$

∴ نقطة B تقع على نقطة E

ومن حيث ان AC انطبق على DF ~~بجانب~~ DF

∴ C يقع على F

ومن حيث أن $a = s$ و

نقطة h تقع على نقطة o .

ومن حيث أن b وقعت على h و g على o

∴ الضلع b ينطبق على الضلع h و

وعلى ذلك فالمثلث abg ينطبق على المثلث sho و

وحيث أن المثلثان متساويان من عامة الوجوه

وهو المطلوب

ملاحظة — ينبغي أن يميز دائماً بين ما هو مفروض في هذه النظرية وما يطلب البرهنة عليه

فالمفروض هو $a = s$ و

g $a = s$ و

g $b = h$ و o

ومن هذه الفروض تمكن البرهنة على أن المثلثين ينطبقان كل على الآخر تمام الانطباق

ومن ذلك نستنتج أن $b = h$ و

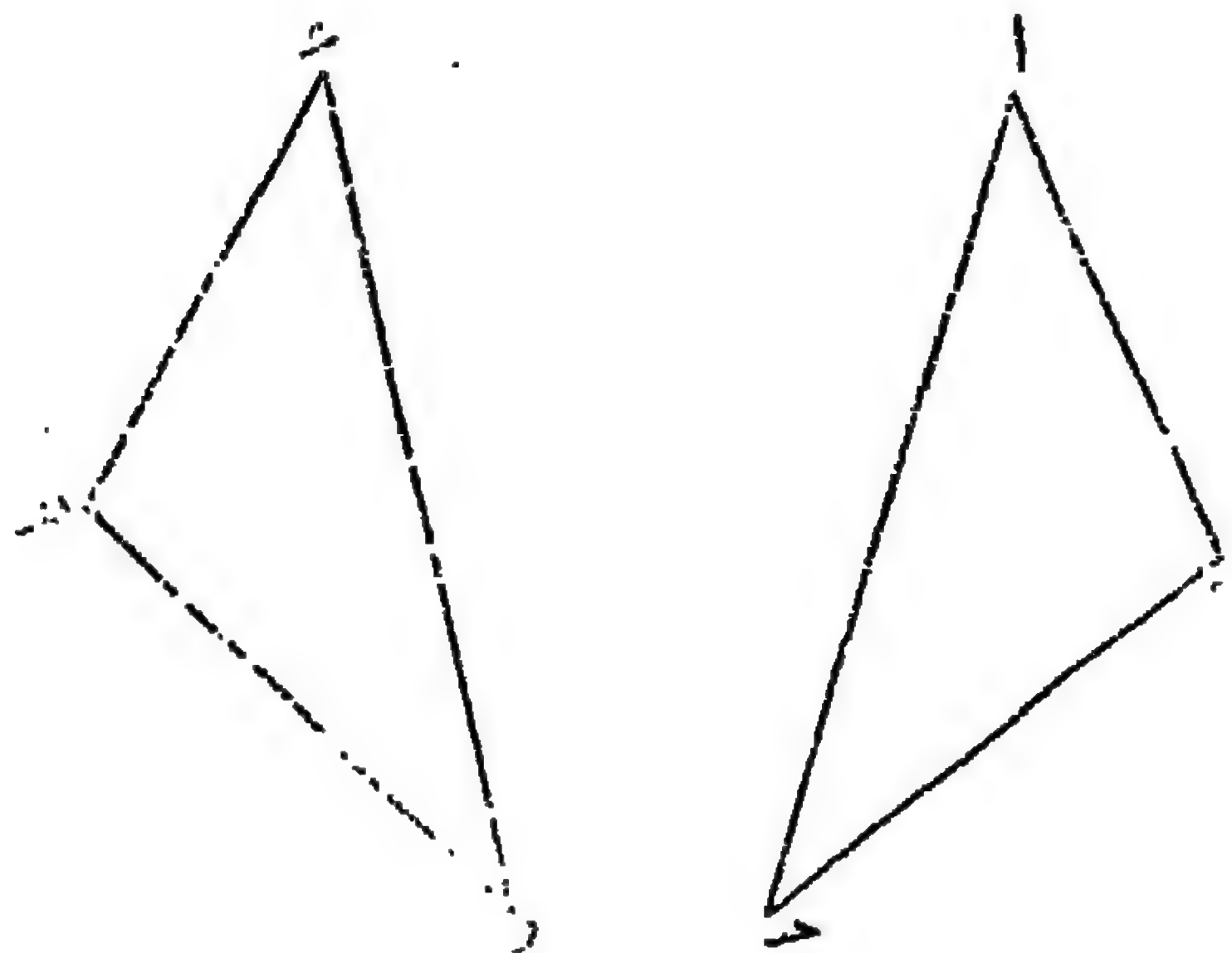
وأن g $a = s$ و o

وأن g $b = h$ و o

وأن المثلثين متساويان في المساحة

ويلاحظ أن الزاويتين اللتين برهننا على تساويهما في المثلثين تقابل كل منهما ضلعاً من المفروض

تساويهما



تنبيه — قد يلزم أحيانا أنه لأجل انطباق

المثلثين أحدهما على الآخر أن يعكس

وضع أحدهما قبل تطبيقه وذلك إن كان

المثلثان كما في هذا الشكل

تمارين

١ المطلوب إثبات أن منتصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين (أولا) ينصف القاعدة (وثانيا) يكون عمودا عليها

٢ ا ب مستقيم معلوم أقمنا عليه من وسطه م العمود م ح برهن على أنه اذا أخذنا أى نقطة مثل د على م ح ووصلنا بينها وبين ا ب يكون $د ا = د ب$

٣ برهن على أن ا ح ب د قطري المربع ا ب ح د متساويان على فرض أن أضلاع المربع متساوية وزواياه قوائم

٤ ا ب ح د مربع والنقط ه و ع منتصفات الأضلاع ا ب ب ح ح د د ا برهن على ان

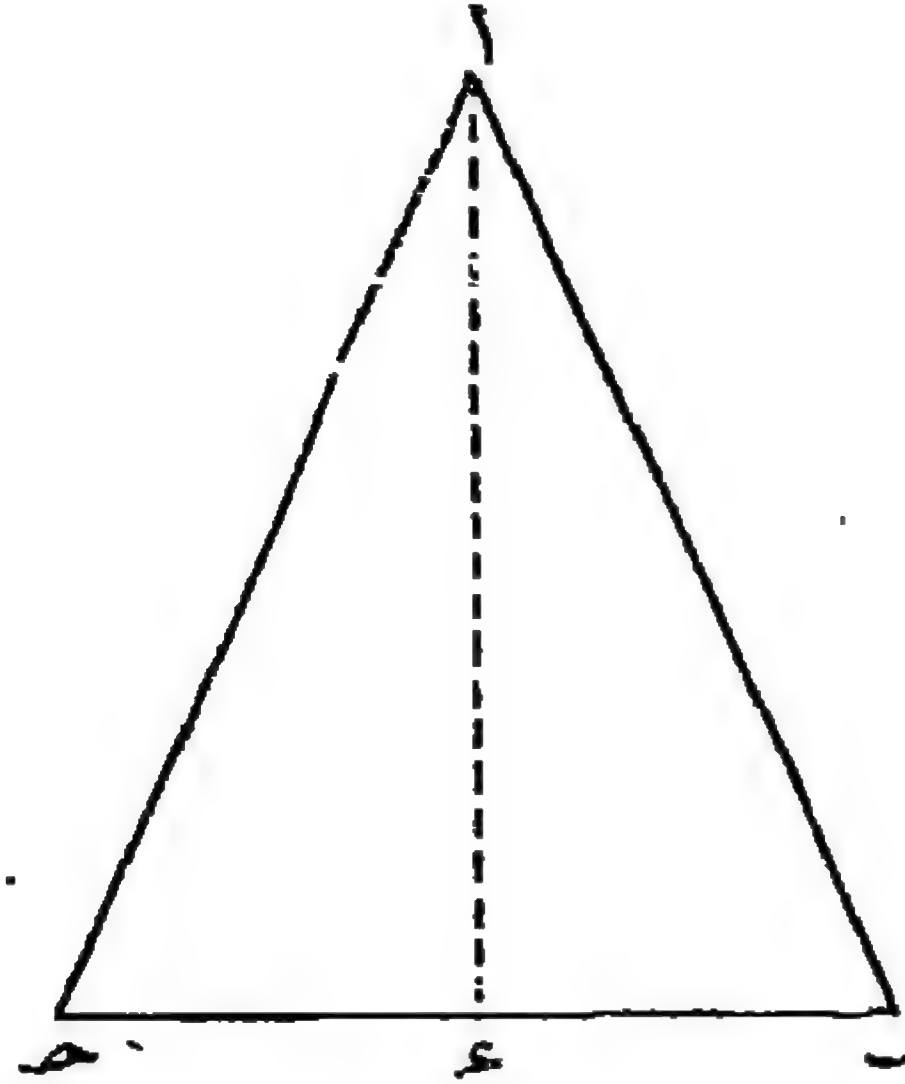
(أولا) ه و = و ع	(ثالثا) ا و = و د
(ثانيا) ا ع = ا و	(رابعا) ب ع = د و

ارسم شكلا خاصا لكل حالة على حدها

٥ ا ب ح مثلث متساوي الساقين أخذنا على ساقيه ا ب ب ا ح البعدين المتساويين ا ص ب ا س ثم وصلنا ص ح ب برهن على أن $ص ح = س ب$

نظرية ٥

زاويتا قاعدة المثلث المتساوي الساقين متساويتان



إذا فرضنا أن $\angle A = \angle B$ مثلث متساوي الساقين فيه $\angle A = \angle B$
فانه يطلب إثبات أن $\angle A = \angle B$ $\angle A = \angle B$

لذلك نفرض أن المستقيم AD ينصف BC وان D هي نقطة تقابل النصف المذكور
بالضلع BC

البرهان - في $\triangle ADB$ و $\triangle ADC$

من حيث ان $\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ \angle ADB = \angle ADC \\ AD = AD \end{array} \right\}$ مشترك بين المثلثين

\therefore ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق (نظرية ٤)

وبذلك $\angle ADB = \angle ADC$ وهو المطلوب

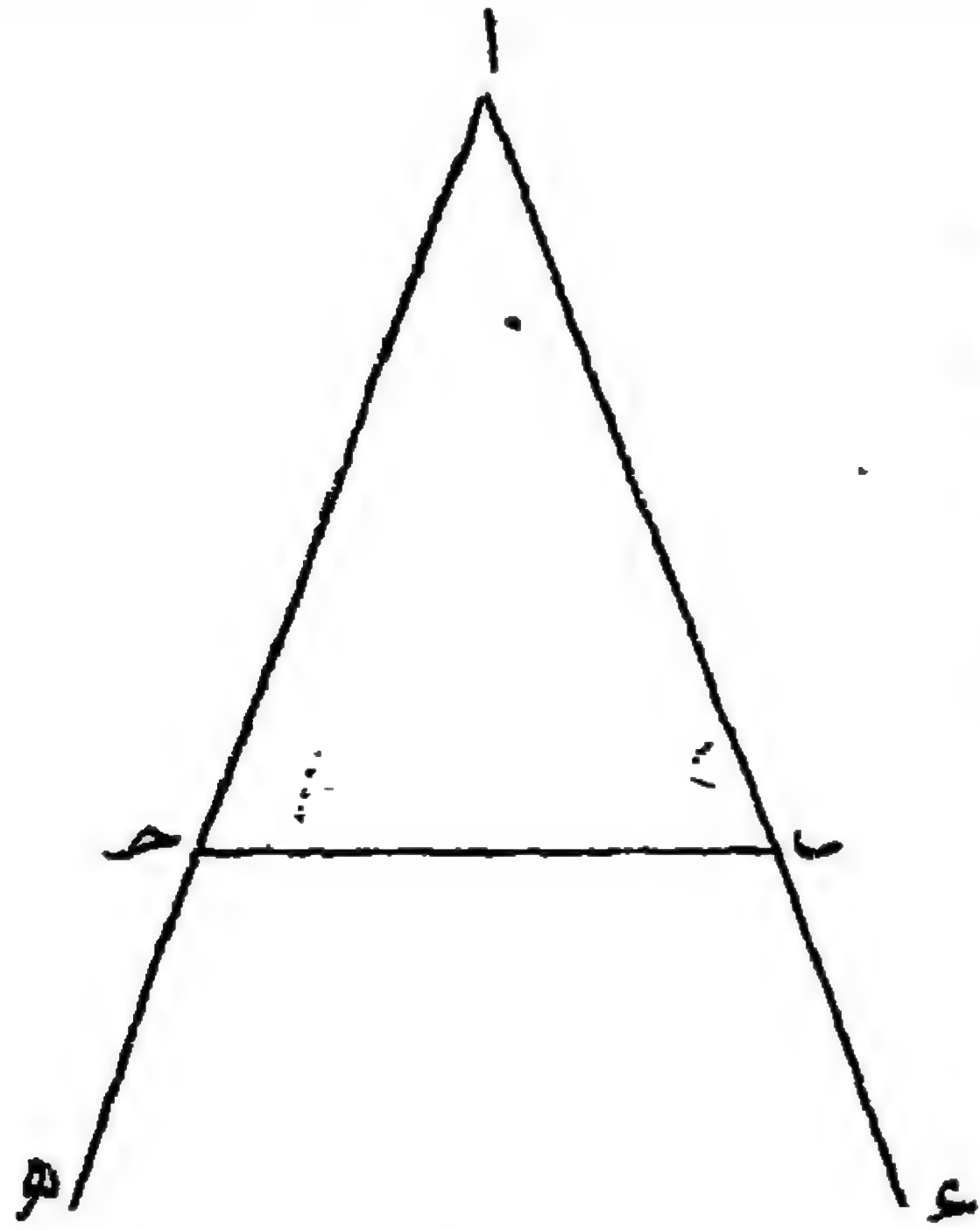
وهناك برهان آخر وهو

تصور طي جزأ $\triangle ADB$ حول المستقيم AD

فمن حيث ان $\angle ADB = \angle ADC$

يقع الضلع AB على الضلع AC

ومن حيث انهما متساويان تقع نقطة B على نقطة C وعلى ذلك ينطبق B على C
 $\therefore \angle ADB = \angle ADC$ وبذلك تتساويان وهو المطلوب



نتيجة ١ - اذا مد كل من الساقين ا ب و ا ج
من المثلث المتساوي الساقين ا ب ج على استقامته
فان كلا من الزاويتين الخارجيتين ج ب د و ب ج ه
تكون مساوية للآخرى لأن كلا منهما تكمل احدى زاويتي
القاعدة المتساويتين

نتيجة ٢ - اذا كان المثلث متساوي الأضلاع فانه
يكون متساوي الزوايا ايضا

تعريف - يقال ان في الشكل تماثلا بالنسبة الى خط معلوم فيه متى أمكن طي الشكل
بحيث ينطبق جزاءه اللذان يفصلهما ذلك الخط كل على الآخر
ويسمى المستقيم الذي يقسم الشكل الى جزأين متماثلين محور التماثل
ومن الواضح أن هذا الانطباق لا يتأتى إلا اذا اتحد الجزءان المتقابلان مساحة وشكلا وتماثلا في وضعهما
بالنسبة الى محور التماثل

اذا قرر هذا فبواسطة نظرية ه يمكن البرهنة على أن منتصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين
يقسمه الى جزأين متماثلين ومنصف أى زاوية في المثلث المتساوي الأضلاع يقسمه الى جزأين متماثلين

تمارين

١ ا ب ج د شكل رباعي أضلاعه متساوية برهن على أنه لو وصلنا القطر ب د لحدث ان

$$\angle د ا ب = \angle د ب ج$$

$$\angle ا ب د = \angle ب ج د$$

$$\angle ا ب ج = \angle ب ج د$$

٢ ا ب ج د ه مثلثان متساويا الساقين مرسومان في جهتي قاعدة مشتركة بينهما وهي ب ج
برهن (بواسطة نظرية ه) على أن $\angle ا ب د = \angle ب ج د$

٣ ا ب ج د ه مثلثان متساويا الساقين لهما قاعدة مشتركة وهي ب ج وهما مرسومان
في جهة واحدة منها ويراد إثبات أن

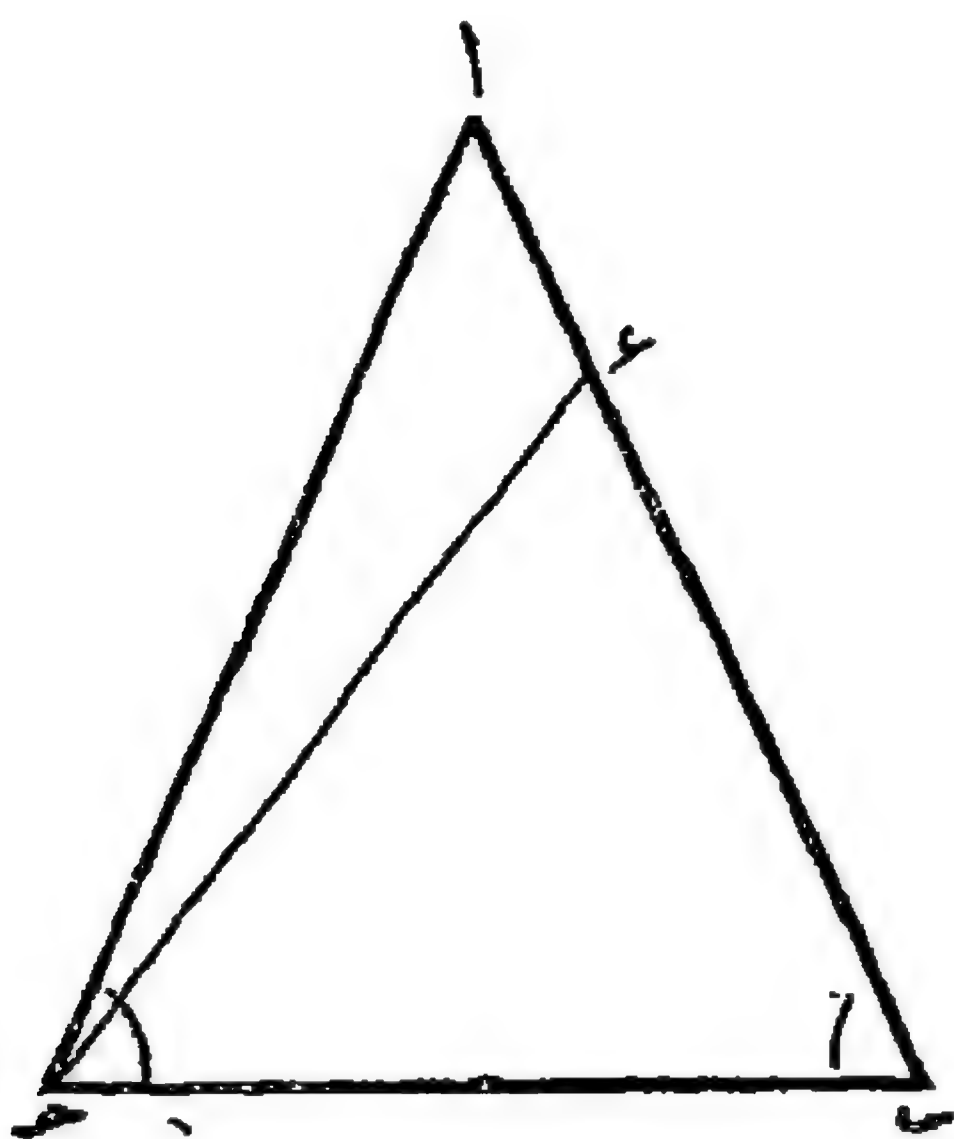
$$\angle ا ب د = \angle ب ج د \text{ (بواسطة نظرية ه)}$$

٤ ا ب ج مثلث متساوي الساقين فيه ا ب = ا ج فاذا نصفنا ا ب بالنقطة ل و ج ب ب
بالنقطة م و ا ج ج بالنقطة د فانه يراد إثبات أن

$$\angle ل ا ب = \angle د ج ب \text{ (ثانيا)} \quad \angle ل ا ب = \angle د ج ب \text{ (ثالثا)} \quad \angle ل ا ب = \angle د ج ب \text{ (أولا)}$$

نظرية ٦

إذا تساوى في المثلث زاويتان فإن الضلعين المقابلين لهما يكونان متساويين



إذا فرضنا أن $ا ب ح$ ثابت فيه

$$د ا ب ح = د ا ح ب$$

فانه يطلب إثبات أن الضلع $ا ح =$ الضلع $ا ب$

لذلك نقول ان لم يكن $ا ب$ $ا ح$ متساويين كان أحدهما $ا ب$ مثلا أكبر من الآخر

وعلى ذلك نأخذ البعد $د ب$ على $ا ب$ مساويا للضلع $ا ح$ ثم نصل $د ح$

البرهان - في $د ب ح$ $د ا ح$

$$د ب = ا ح$$

$د ب ح$ مشترك

من حيث ان

$$\text{والزاوية المحصورة } د ب ح = \text{الزاوية المحصورة } ا ح ب$$

$$\therefore د ب ح = د ا ح \text{ في المساحة (نظرية ٤)}$$

أى أن الجزء يساوى الكل وهو محال

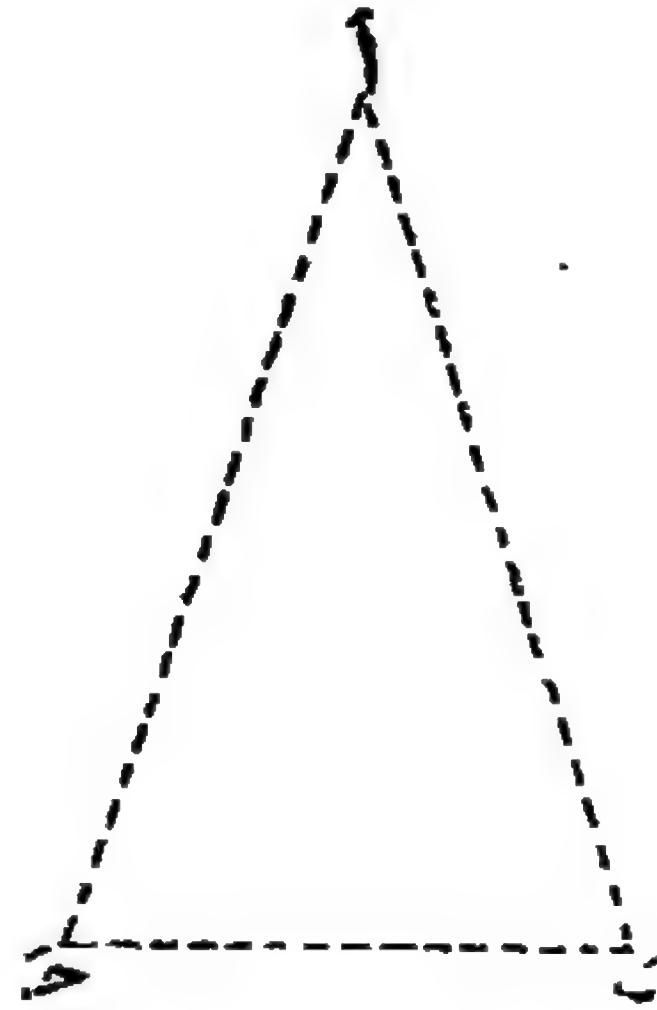
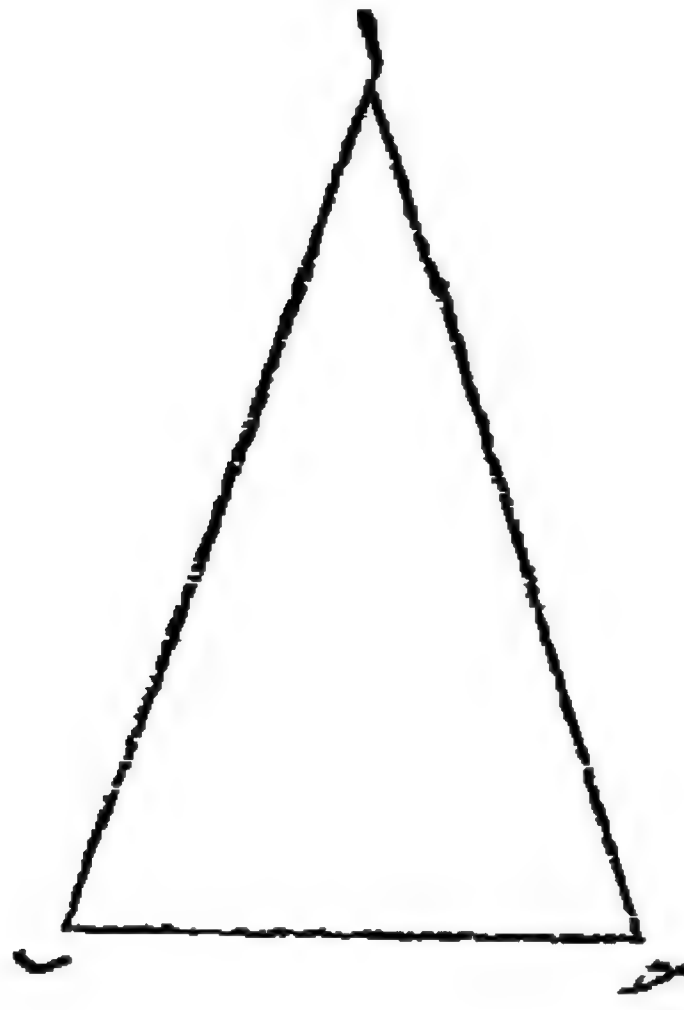
\therefore لا يمكن ان يكون $ا ب$ $ا ح$ غير متساويين

أى أن الضلع $ا ب =$ الضلع $ا ح$ وهو المطلوب

نتيجة - المثلث المتساوى الزوايا متساوى الأضلاع

ملاحظة على نظريتي ٦ ٥

يمكن تحقيق هاتين النظريتين عملاً وذلك بأن نرسم مثلثاً متساوي الساقين على قطعة من الورق



ثم نفصله منها ونقلب وضعه الأصلي
فاذا وضعناه في مكانه الخالي الذي كان
يشغله أولاً شغله تماماً

فاذا فرضنا أن $\angle A = \angle B$ كان الوضع
الأصلي للمثلث $\angle A = \angle B$ وان $\angle A = \angle B$
هو عين المثلث مقلوب الوضع نرى أنه
عند تطبيق النقطة A على النقطة A
كما في نظرية ٥ تقع النقطة B على
النقطة C والنقطة C على النقطة B

ونرى كما في نظرية ٦ أنه عند تطبيق النقطة C على النقطة B والنقطة B على النقطة C تقع النقطة A على النقطة A
وفي كلتا الحالتين نرى أن المثلث المقلوب وضعه انطبق على الأصلي وعلى ذلك فالضلع والزاوية في الجهة
اليمنى من المثلث مساويان للضلع والزاوية في الجهة اليسرى منه

(ملاحظة على النظرية وعكسها)

يشمل منطوق كل نظرية ركنين الأول يدل على الشروط المعلومة وهو ما يعبر عنه بالفرض والثاني
يدل على ما يطلب البرهنة عليه ويعبر عنه بالنتيجة

فمثلاً في منطوق نظرية ٥ الفرض هو أن في $\triangle ABC$ الضلع $AB = AC$ الضلع AB
وبواسطة هذا الفرض يطلب البرهنة على أن $\angle A = \angle B$ وهذا هو الناتج
فان عكسنا الأمر وجعلنا فرض نظرية ناتجاً ونتيجها فرضاً حصلنا على نظرية أخرى تسمى عكس الأولى

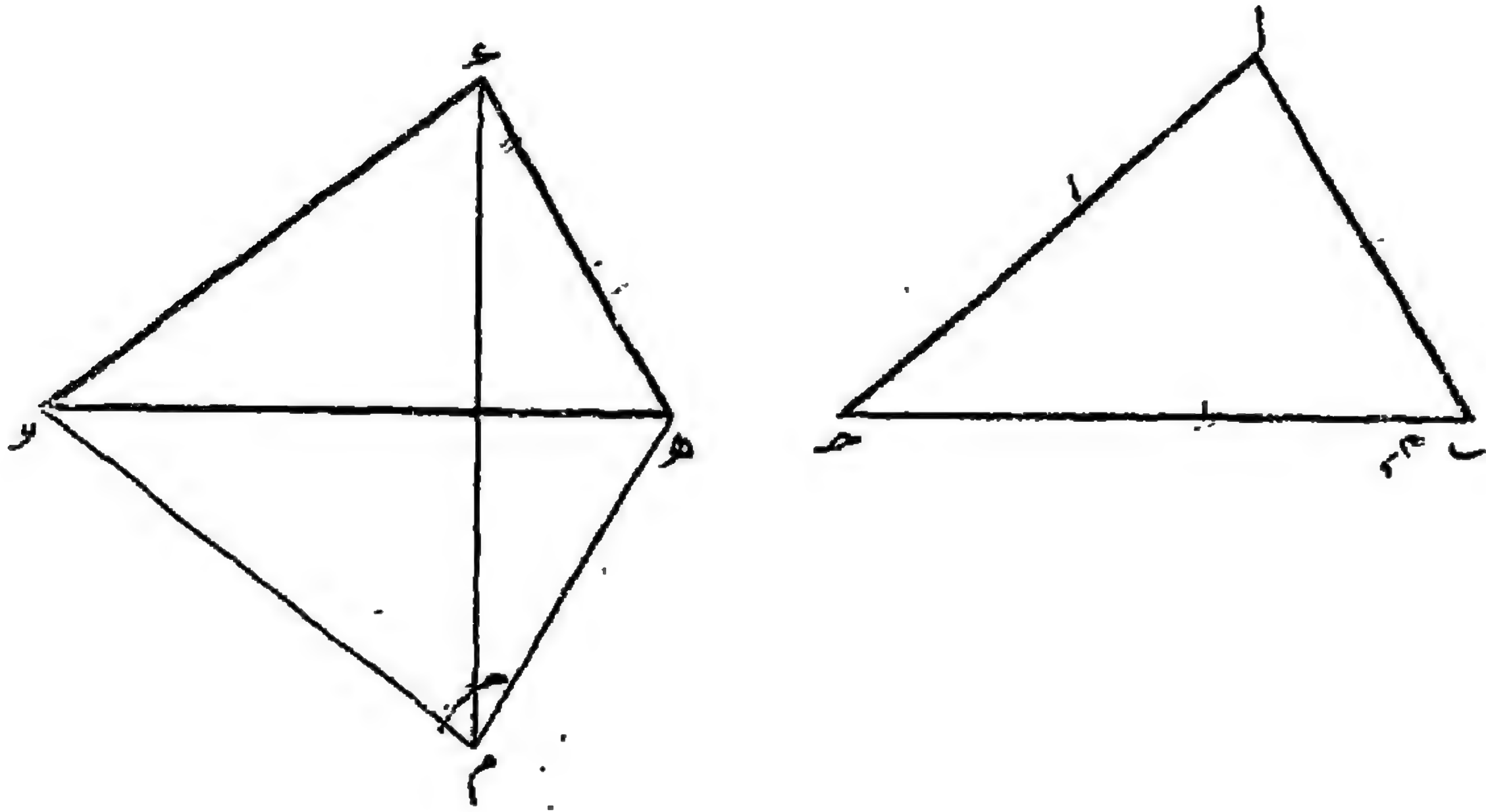
فمثلاً في نظرية ٥ الفرض هو أن $AB = AC$
والنتيجة هو أن $\angle A = \angle B$
وفي نظرية ٦ الفرض هو أن $\angle A = \angle B$
والنتيجة هو أن $AB = AC$

ومن ذلك نرى أن نظريتي ٦ ٥ متعاكستان لأن فرض الأولى ناتج للثانية وفرض الثانية ناتج للأولى
هذا وينبغي أن نلاحظ أننا في نظرية ٦ لم نتبع طريقة البرهنة على صحة الناتج نفسه بل أقننا الدليل
على عدم إمكان غير الصحة اذ لو سلمنا بغير صحة المطلوب من النظرية لحصلنا على ناتج غير ممكن عقلاً
وتسمى هذه الطريقة بطريقة البرهان المؤدى الى خلاف الفرض وهي مستعملة كثيراً في الهندسة لاسيما
في عكس بعض ما يتقدم من النظريات

ولا يلزم من كون النظرية صحيحة أن يكون عكسها كذلك (راجع صفحة ٢٨)

نظرية ٧

ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى كل ضلع من أحدهما نظيره من الآخر



اذا فرضنا أن $\triangle ا ب ج$ و $\triangle د هـ م$ مثلثان فيهما

$$ا ب = د هـ$$

$$ب ج = هـ م$$

$$\angle ب = \angle هـ$$

فانه يطلب إثبات أن هذين المثلثين متساويان من عامة الوجوه

البرهان — نتصور وضع المثلث $\triangle ا ب ج$ تحت المثلث $\triangle د هـ م$ على شرط أن ينطبق الضلع $ب ج$ على مساويه $هـ م$ ويأخذ الضلع $ا ب$ الوضع $م هـ$ والضلع $ا ح$ الوضع $م و$ ثم نصل $د م$.

فمن حيث ان $د هـ = م هـ$

$\therefore \triangle د هـ م = \triangle م هـ د$ (نظرية ٥)

ومن حيث ان $د م = م و$

$\therefore \triangle د م و = \triangle م و د$

وعلى ذلك فالزاوية الكلية $\angle د هـ م =$ الزاوية الكلية $\angle م هـ د$ و

أى أن $\angle د هـ م = \angle م هـ د$

وفى $\triangle ا ب ج$ و $\triangle د هـ م$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ب ا} = \text{ه د} \\ \text{ا د} = \text{ح د} \\ \text{ا د} = \text{ب ا} \end{array} \right\} \text{من حيث ان}$$

∴ هذان المثلثان متساويان من عامة الوجوه (نظرية ٤) وهو المطلوب

تنبيه - في هذه النظرية

الفرض هو $\text{ا ب} = \text{ه د}$ $\text{ا د} = \text{ح د}$ $\text{ه د} = \text{ا د}$

والنتيجة هو $\text{ا د} = \text{ح د}$ $\text{ا د} = \text{ب ا}$ $\text{ا د} = \text{ه د}$

والمثلثان متساويان في المساحة

ونرى مما تقدم أن الزوايا التي يراد البرهنة على تساويها تقابل أضلاعاً مفروضا تساويها

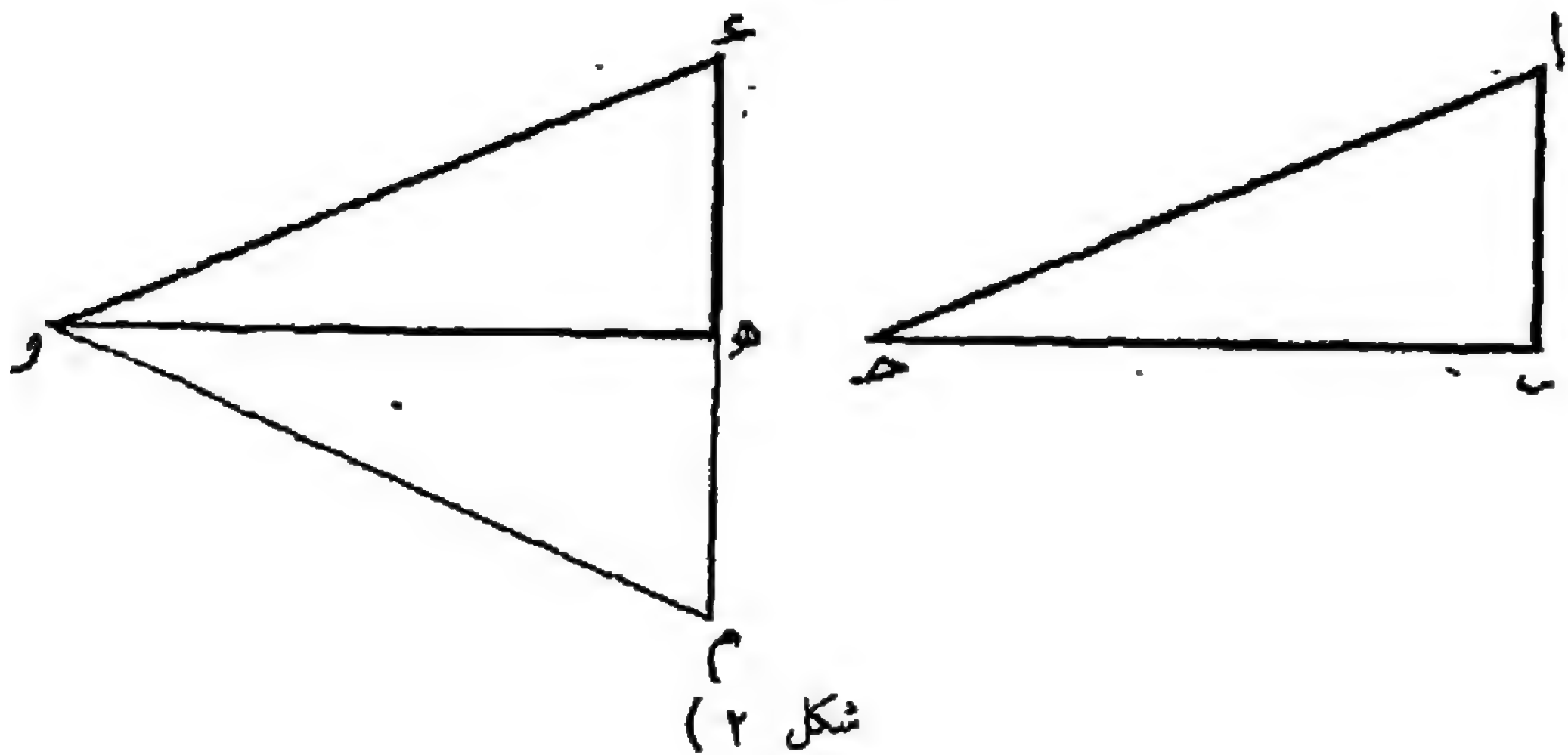
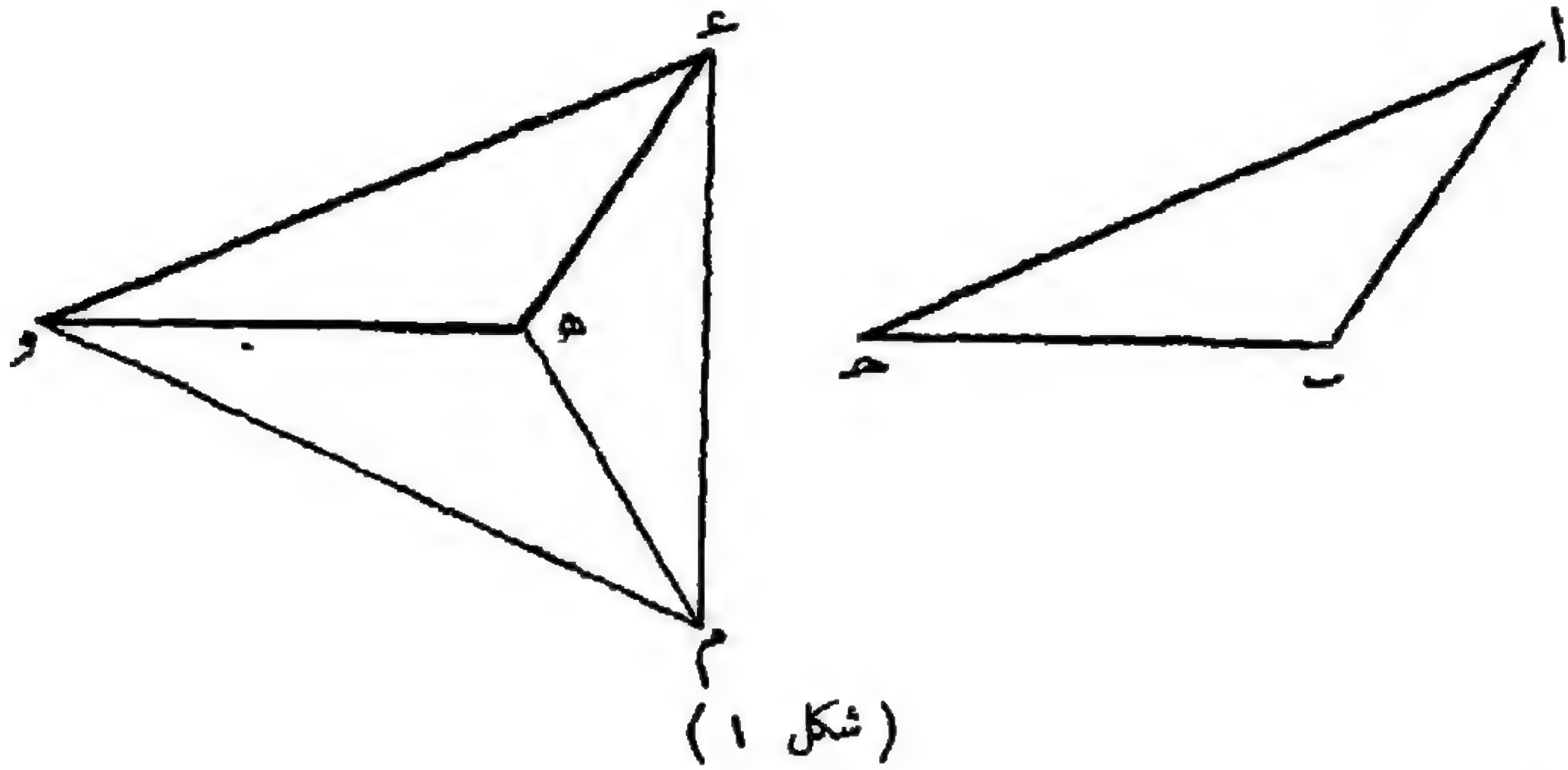
ملاحظة ١ - نرى أن المستقيم د م في النظرية المتقدمة وقع داخل الشكل ويجوز أن يكون له

وضع آخر وذلك في حالتين

الأولى : أن يقع المستقيم د م خارج الزاويتين ه د و ه م وأن كان المثلثان منفرجى الزاوية

كما في شكل ١

والثانية : أن ينطبق المستقيم د م على كل من ه د و ه م بأن كان المثلثان قائمى الزاوية كما في شكل ٢



وفي البرهنة على النظرية المتقدمة اذا كانت المثلثان قائمي الزاوية أو منفرجيهما يمكن عدم مراعاة هذه الحالة وذلك اذا اخترنا تطبيق أكبر الأضلاع في كل من المثلثين فيؤول الأمر اذن الى أن المستقيم s يقع داخل الشكل كما تقدم في شكل النظرية

ملاحظة ٢ — يقال إن المثلثين متساويان في الزوايا اذا تساوت كل زاوية من أحدهما نظيرتها من الآخر وعلى ذلك اذا ساوى في المثلثين كل ضلع من أحدهما نظيره من الآخر فالمثلثان متساويان في الزوايا

على التاميد أن يبين عكس هذه النظرية ويرسم شكلا يبين فيه أنه لا يلزم أن يكون العكس صحيحا

تنبيه — من المستحسن أن يدرس بعد هذه النظرية الدعاوى العملية ١ — ٥ وكذلك عملية ٨ (راجع صفحة ٧٥) لأن في براهينها ايضاحا لانطباق المثلثين

تمارين على تطابق المثلثين في نظريتي ٤ و ٧

(مسائل نظرية)

- ١- برهن على أن المستقيم الواصل من رأس المثلث المتساوي الساقين الى وسط قاعدته (أولا) ينصف زاوية الرأس (ثانيا) يكون عمودا على القاعدة
- ٢ ΔABC معين (وهو شكل رباعي أضلاعه متساوية) برهن على أنه ان وصلنا القطر AC يحدث (أولا) ان $\Delta ABC = \Delta ACB$ (ثانيا) ان AC ينصف كلا من زاويتي B و A و $AC \perp BC$ و $AC \perp AB$
- ٣ اذا كان في الشكل الرباعي $ABCD$ كل ضلعين متقابلين متساويان أعني أن $AB = DC$ و $AD = BC$ فبرهن على أن $\Delta ABC = \Delta DCB$
- ٤ المثلثان ABC و DEF متساويا الساقين ومتحدتا القاعدة ب C برهن (بواسطة نظرية ٧) على أن $\Delta ABC = \Delta DEF$ (أولا) في حالة ما اذا كان المثلثان في جهة واحدة من القاعدة (وثانيا) في حالة ما اذا كانا في جهتيها
- ٥ المثلثان ABC و DEF متساويا الساقين ومتحدتا القاعدة ب C ومرسومان عليها كل في جهة من جهتيها برهن على أنه لو وصلنا AD لكان منصف لكل من زاويتي B و A و $AC \perp BC$ و $AC \perp AB$
- ٦ المطلوب اثبات أن المستقيمين الواصلين من طرفي قاعدة مثلث متساوي الساقين الى منتصفى ساقيه متساويان
- ٧ اذا فرضت نقطتان على قاعدة مثلث متساوي الساقين وكانتا متساويتى البعد عن طرفي القاعدة فانهما تكونان متساويتى البعد عن رأس المثلث
- ٨ برهن على أن المثلث الحادث من توصيل منتصفات اضلاع المثلث المتساوي الأضلاع يكون متساوي الأضلاع
- ٩ المثلث ABC متساوي الساقين فيه $AB = AC$ فاذا نصفنا كلا من الزاويتين B و C بالمنصفين BD و CE حدث أن (أولا) $BD = CE$ (ثانيا) AD ينصف الزاوية A
- ١٠ برهن على أن قطري المعين (راجع تمرين ٢) ينصف كل منهما الآخر ويكونان متعامدين
- ١١ المثلث ABC متساوي الساقين فيه $AB = AC$ فاذا مددنا الساق B الى D من جهة A على استقامته الى E وكذلك مددنا C الى F من جهة A على استقامته الى G على شرط أن $AD = AE$ ثم وصلنا BD و CE حدث أن $BD = CE$

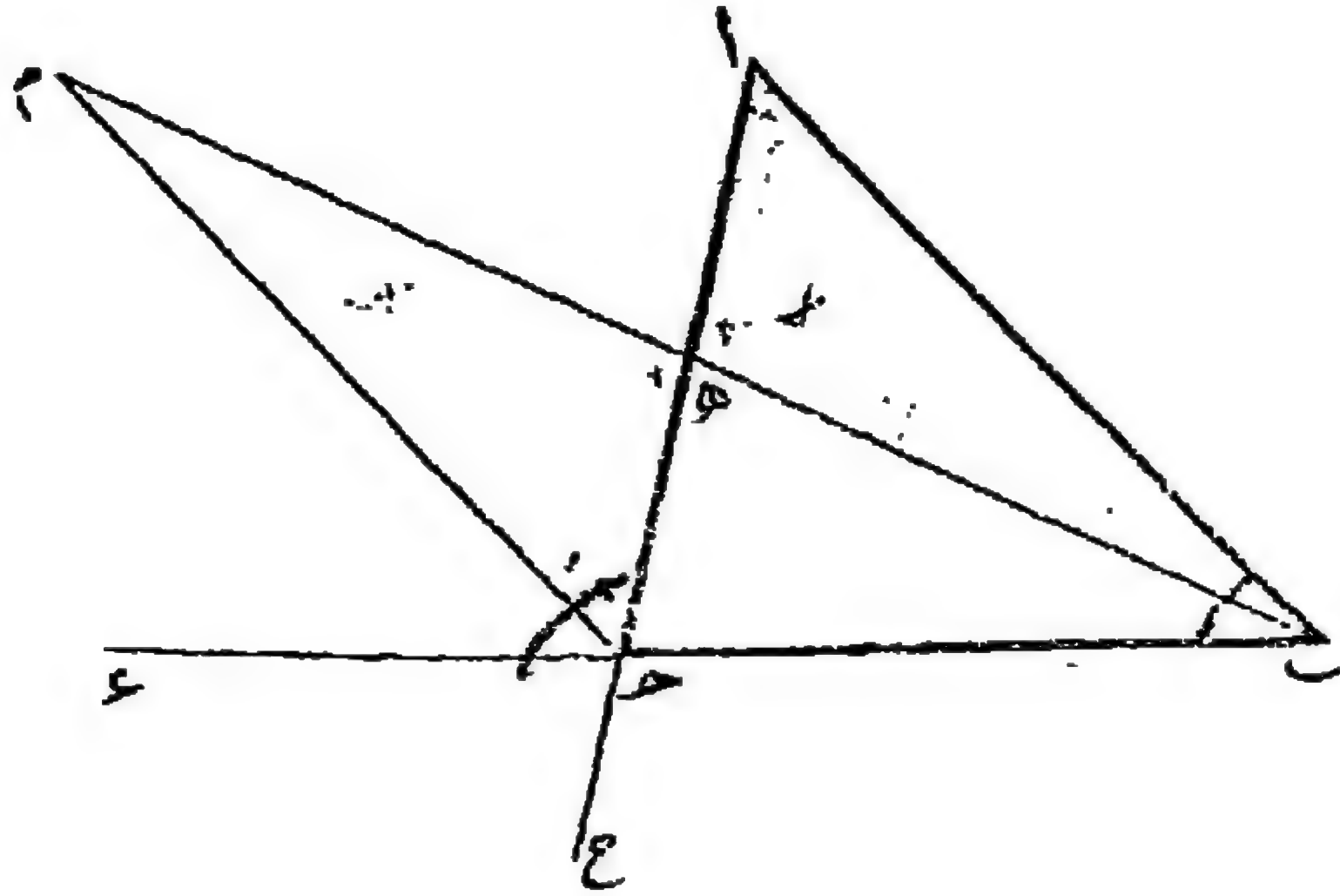
تمارين على المثلثات

(عددية وتخطيطية)

- ١ المطلوب رسم المثلث $أ ب ح$ الذى طول ضلعه $أ = ٥$ سنتيمترات والضلع $ب = ٥,٥$ من السنتيمترات $ح = ٣,٦$ من السنتيمترات وقياس كل من زواياه وإيجاد مقدار مجموعها
- ٢ فى المثلث $أ ب ح$ الضلع $أ = ٧,٥$ من السنتيمترات $ب = ٧$ سنتيمترات $ح = ٦,٥$ من السنتيمترات والمطلوب رسم العمود النازل من $ب$ على $أ ح$ وقياسه
- ٣ المطلوب رسم المثلث $أ ب ح$ الذى ضلعه $أ = ٧$ سنتيمترات $ب = ٦$ سنتيمترات $ح = ٦,٥$ وثبات (نظريا وعمليا) أن أى مثلثين تتوفر فيهما هذه الفروض يتحدان مساحة وشكلا
- ٤ المطلوب رسم المثلث على فرض أن $ب = ٤$ سنتيمترات $ح = ٥$ سنتيمترات $أ = ٥,٧$ وإيجاد طول الضلع $أ$ بقياسه وكذا قياس كل من الزاويتين $ب$ و $ح$
- ارسم مثلثا آخر باستعمال المقادير التى وجدتها لكل من $أ$ والزاويتين $ب$ و $ح$ وقس فيه الضلعين $ب$ و $ح$ و $أ$ واذكر ما تستنتجه من ذلك
- ٥ سلم مرتكز على حائط تبعد قاعدته عن هذا الحائط بمقدار $٢,٤$ من الأمتار ورأسه على شباك مرتفع عن الأرض بقدر ٧ أمتار والمطلوب رسم شكل يبين فيه وضع السلم على شرط أن يكون مقياس الرسم سنتيمترا واحدا لكل متر وإيجاد طول السلم بقياسه من الرسم
- ٦ مشى شخص من نقطة معلومة متجها نحو الشمال ٩٩ مترا ثم اتجه نحو الشرق فمشى ٢٠ مترا والمطلوب ايضاح ذلك برسم (يكون مقياسه سنتيمترا لكل عشرة أمتار) وإيجاد بعد الشخص عن نقطة القيام بقياس هذا البعد بأقرب ما يمكن من الحقيقة
- ٧ طول ظل قضيب من الخشب عند ما تكون الشمس فوق الأفق بقدر ٤٢° هو ١٠ أمتار والمطلوب رسم شكل يبين ذلك ويكون مقياس الرسم فيه سنتيمترا لكل متر ثم إيجاد طول القضيب التقريبي بقياسه من الرسم المذكور
- ٨ نخرج مساح من النقطة المعينة $أ$ واتجه نحو الشرق ومشى ١٥٠ مترا حتى وصل الى نقطة $ب$ ثم اتجه نحو الشمال ومشى ٣٠٠ مترا حتى وصل الى نقطة $ح$ ثم اتجه نحو الغرب ومشى ٤٥٠ مترا فوصل الى $د$ والمطلوب عمل الرسم البياني لسير هذا الرجل (مقياس الرسم سنتيمترا لكل ٥٠ مترا) وإيجاد بعد $د$ عن $أ$ بالتقريب وكذا قياس $د$ و $أ ب$ مبينا اتجاه $د$ بالنسبة الى $أ$
- ٩ النقطتان $ب$ و $ح$ واقعتان على شاطئ نهر مستقيم ومبتعدتان بقدر ٢٦٠ مترا فإذا كانت $أ$ سفينة راسية فى النهر $ب$ و $أ$ تساوى ٣٣° $ب$ و $أ = ٨١^\circ$ فانه يراد عمل الرسم البياني الذى يستدل منه بوجه التقريب على بعد السفينة عن $ب$ و $ح$ وكذا بعدها عن أقرب نقطة على الشاطئ المذكور
- ١٠ لزم أثناء مسح مزرعة أن يعرف البعد بين النقطتين $أ$ و $ب$ وكان بينهما بحيرة يتعذر المرور فيها وبذلك تعذر قياس البعد بينهما مباشرة فأخذ المساح نقطة ثالثة وهى $ح$ يمكنه أن يصل منها الى كل من $أ$ و $ب$ فوجد أن $أ = ٢٤٥$ مترا $ب = ٣٢٠$ مترا وان $د$ و $أ ب = ٤٢^\circ$ والمطلوب عمل رسم يبين البعد التقريبي بين النقطتين المفروضتين

نظرية ٨

إذا مَدَّ أحد أضلاع المثلث على استقامته كانت الزاوية الخارجة الحادثة أكبر من أى زاوية داخلية ماعدا المجاورة لها



إذا فرضنا أن $\angle \alpha$ مثلث وممدنا ضلعه β على استقامته الى γ
فانه يطلب اثبات أن الزاوية الخارجة α أكبر من كل من β و γ
لذلك نفرض أن γ منتصف α

ونصل β ونمده على استقامته ونأخذ على امتداده البعد $\beta = \gamma$ ثم نصل γ
البرهان — في المثلثين $\alpha \beta \gamma$ و $\alpha \gamma \beta$

$$\alpha \beta = \alpha \gamma$$

$$\beta \gamma = \gamma \beta$$

لتقابلهما بالرأس

(نظرية ٤)

$$\alpha \beta \gamma = \alpha \gamma \beta$$

ينطبق $\alpha \beta \gamma$ على $\alpha \gamma \beta$

$$\alpha \beta = \alpha \gamma$$

لكن $\alpha \beta$ أكبر من $\alpha \gamma$

$$\alpha \beta > \alpha \gamma$$

وبالطريقة عينها يقال إذا مَدَّ α على استقامته الى γ ووصل من α الى منتصف β بمستقيم

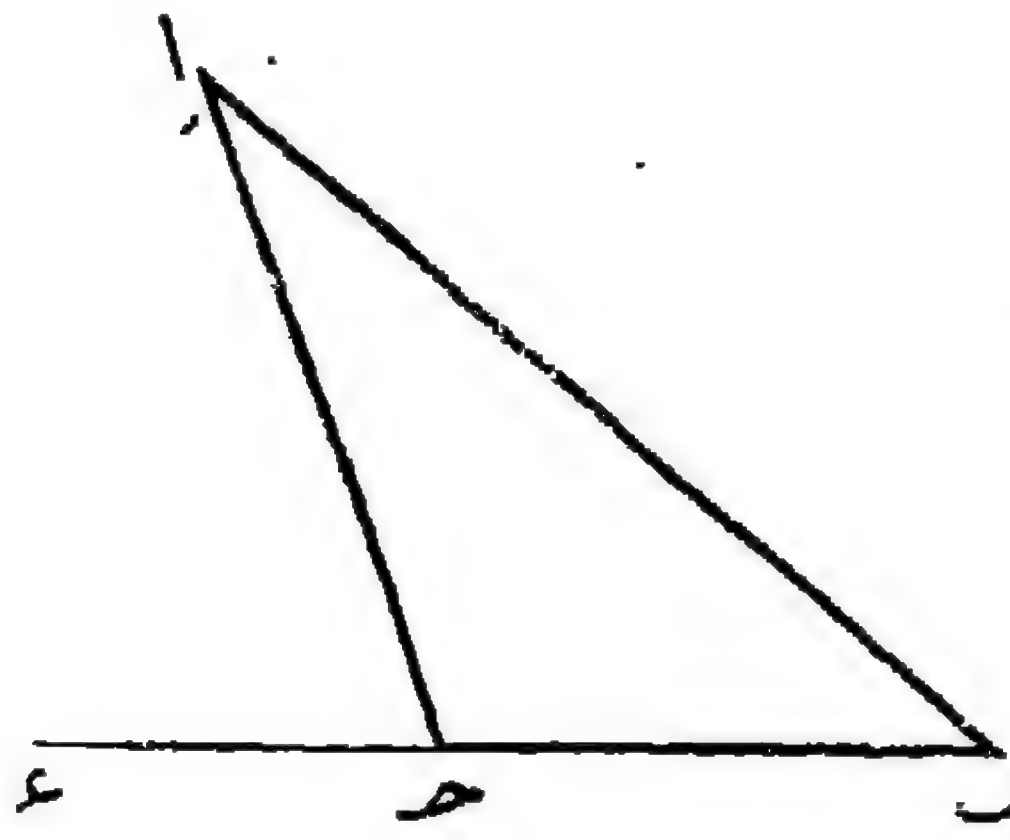
تسهل البرهنة على أن $\alpha \beta$ أكبر من $\alpha \gamma$

لتقابلهما بالرأس

وهو المطلوب

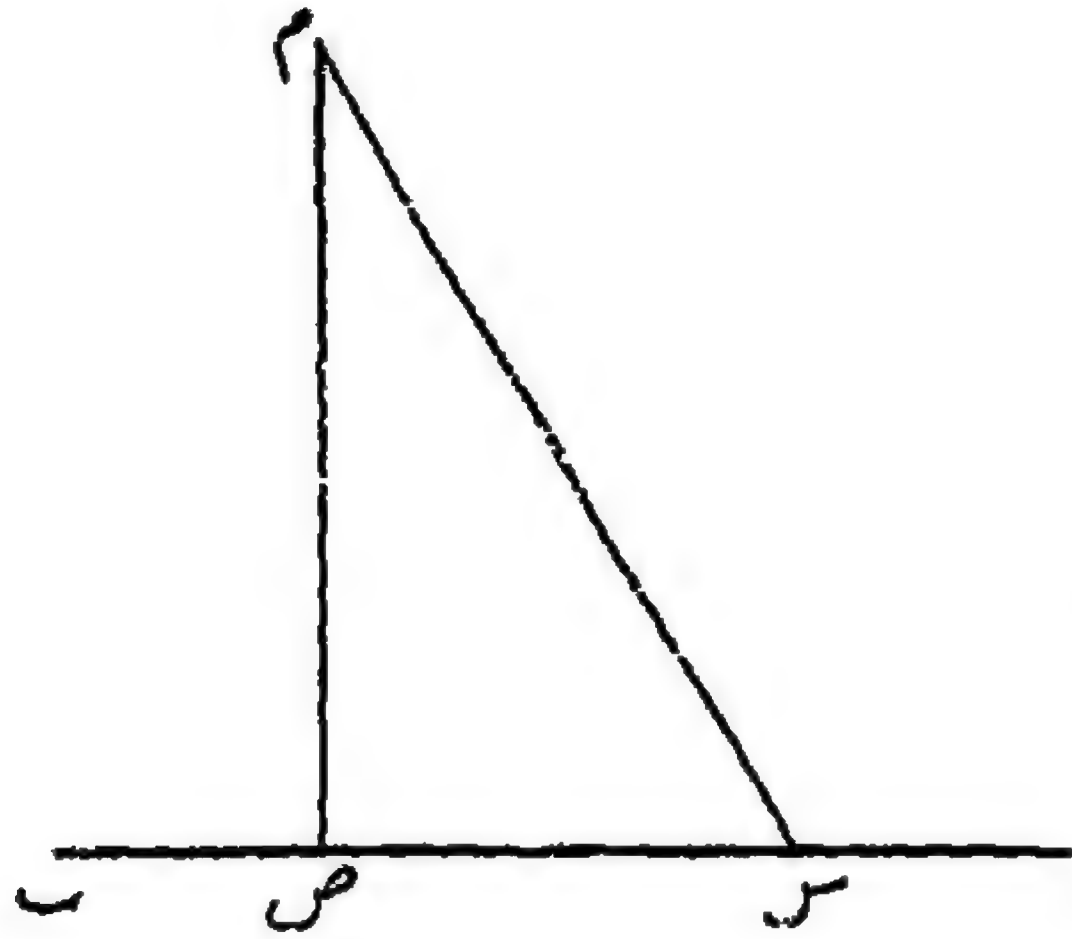
$$\alpha \beta = \alpha \gamma$$

$$\alpha \beta > \alpha \gamma$$



نتيجة ١ — مجموع أى زاويتين فى المثلث أصغر من قائمتين
وللبرهنة على ذلك نقول من حيث ان
 $\angle ا ب ح > \angle ا ح د$ أصغر من $\angle ا ح د$ كما تقدم
 فاذا أضفنا الى كل منهما $\angle ا ح ب$
 حدث أن $\angle ا ب ح + \angle ا ح ب > \angle ا ح د + \angle ا ح ب$
 أى أن مجموع أى زاويتين مثل $\angle ا ب ح$ و $\angle ا ح ب$
 أصغر من قائمتين

نتيجة ٢ — يجب أن يكون فى كل مثلث من الزوايا الحادة اثنتان على الأقل
لأنه بناء على النتيجة السابقة اذا كان فى المثلث زاوية منفرجة أو قائمة يلزم أن يكون كل من الزاويتين
الأخريين أقل من قائمة



نتيجة ٣ — لا يمكن أن ينزل من نقطة خارج مستقيم
إلا عمود واحد عليه

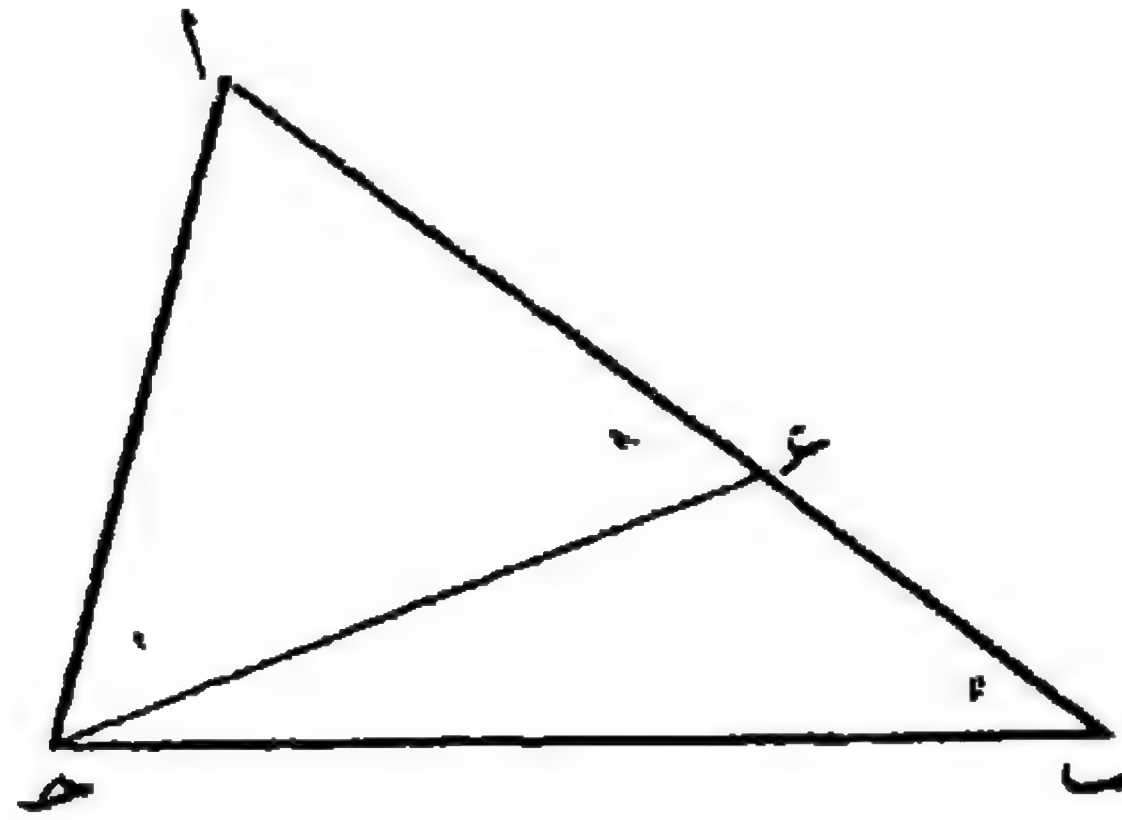
لو أمكن انزال عمودين مثل $م ك$ و $م ص$ من نقطة
مثل $م$ على المستقيم $ا ب$ لكان فى المثلث $م س ص$
زاويتان قائمتان وهما $م س ص$ و $م ص ص$ وهذا محال

تمارين

- ١ برهن على نتيجة ١ فى النظرية السابقة بواسطة وصل النقطة $ا$ بأى نقطة من نقط القاعدة $ب ج$
- ٢ $\angle ا ب ح > \angle ا ح د$ مثلث $ك د$ نقطة داخله فاذا وصلنا $ب د$ و $ك د$ فبرهن على أن $\angle د ب ح > \angle ا ك ب$
من $\angle د ب ا > \angle ا ح د$ بواسطة العمليتين الآتيتين
 (الأولى) مد $ب د$ على استقامته حتى يقابل $ا ح$
 (الثانية) وصل $ا د$ و مدّه على استقامته جهة القاعدة
- ٣ اذا مد أحد أضلاع مثلث على استقامته فى كلتا جهتيه فان الزاويتين الخارجيتين الحادتين
أكبر من قائمتين
- ٤ لا يمكن أن يمد الى مستقيم من نقطة خارجة عنه أكثر من مستقيمين كل منهما يساوى طولاً معلوماً
- ٥ اذا مد كل من ساقى المثلث المتساوى الساقين على استقامته فان كلا من الزاويتين الخارجيتين
منفرجة

نظرية ٩

الضلع الأكبر في أي مثلث تقابله الزاوية الكبرى



في المثلث ABC الضلع AB أكبر من الضلع AC .

ويطلب البرهنة على أن $\angle C > \angle B$ أكبر من $\angle B > \angle A$.

لذلك نأخذ على AB البعد $AD = AC$ ونصل CD .

البرهان — من حيث أن $\angle A = \angle C$.

$\therefore \angle C > \angle B = \angle A$ (نظرية ٥)

ولكن $\angle C > \angle B$ خارجة بالنسبة إلى المثلث BCD .

$\therefore \angle C > \angle B$ أكبر من $\angle B > \angle A$ التي هي $\angle A > \angle B$.

$\therefore \angle C > \angle B$ أكبر من $\angle A > \angle B$.

ومن باب أولى $\angle C > \angle B$ أكبر من $\angle A > \angle B$ وهو المطلوب

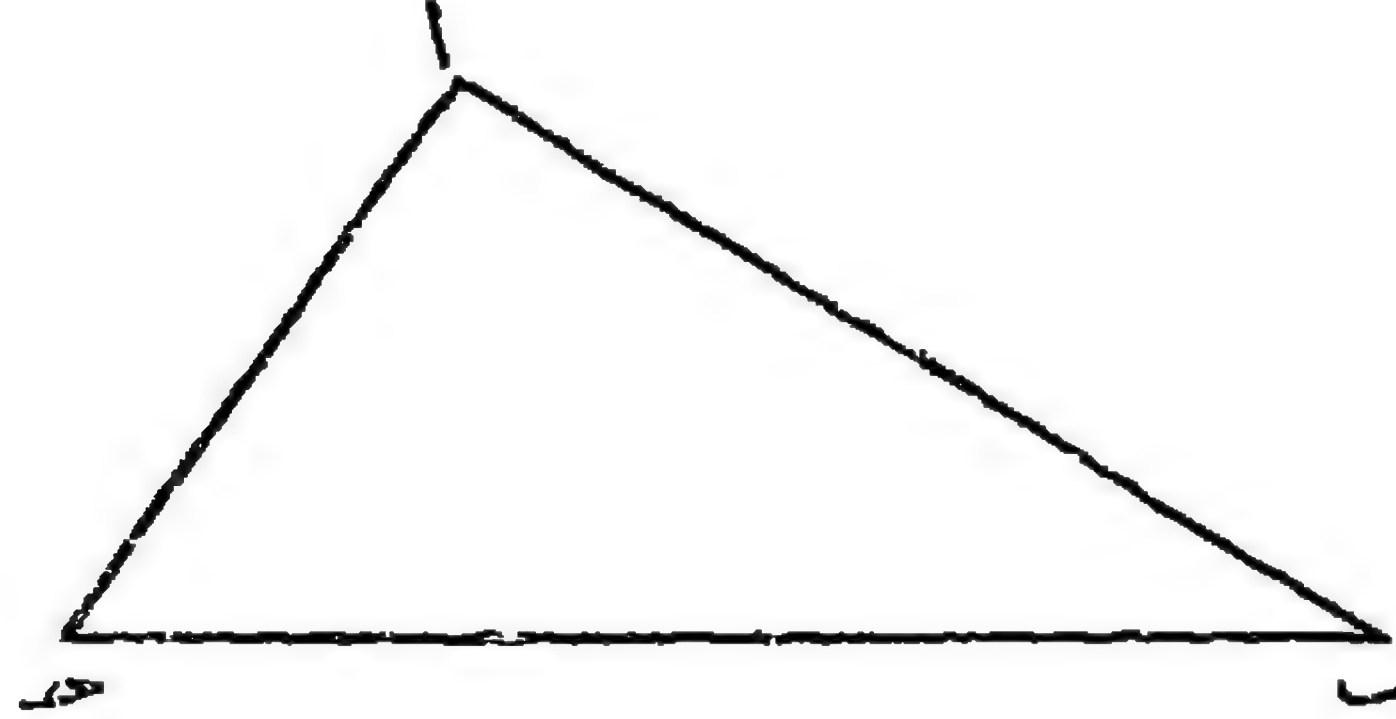
ملاحظة — طريقة البرهان في النظرية الآتية تعرف بطريقة الاستقصاء ويمكن اتباعها إذا لم يكن

ب. من صحة حالة واحدة من عدة حالات مفروضة فتمت قام البرهان على عدم صحة كل الحالات ما عدا

أحدها ثبت صحة هذه الحالة

نظرية ١٠

الزاوية الكبرى في أي مثلث يقابلها الضلع الأكبر



في المثلث $أ ب ج$ الزاوية $أ > ب$ أكبر من الزاوية $أ ب > ج$

ويطلب البرهنة على أن الضلع $أ ب$ أكبر من الضلع $أ ج$

البرهان — ان لم يكن $أ ب$ أكبر من $أ ج$

فإما أن يساويه وإما أن يكون أصغر منه

فان كان $أ ب = أ ج$

لزم أن تكون $أ ب ج = أ ج ب$ (نظرية ٥)

وهذا خلاف الفرض

وان كان $أ ب$ أصغر من $أ ج$

لزم أن تكون $أ ب ج < أ ج ب$ أصغر من $أ ج ب < أ ب ج$

وهذا خلاف الفرض أيضا

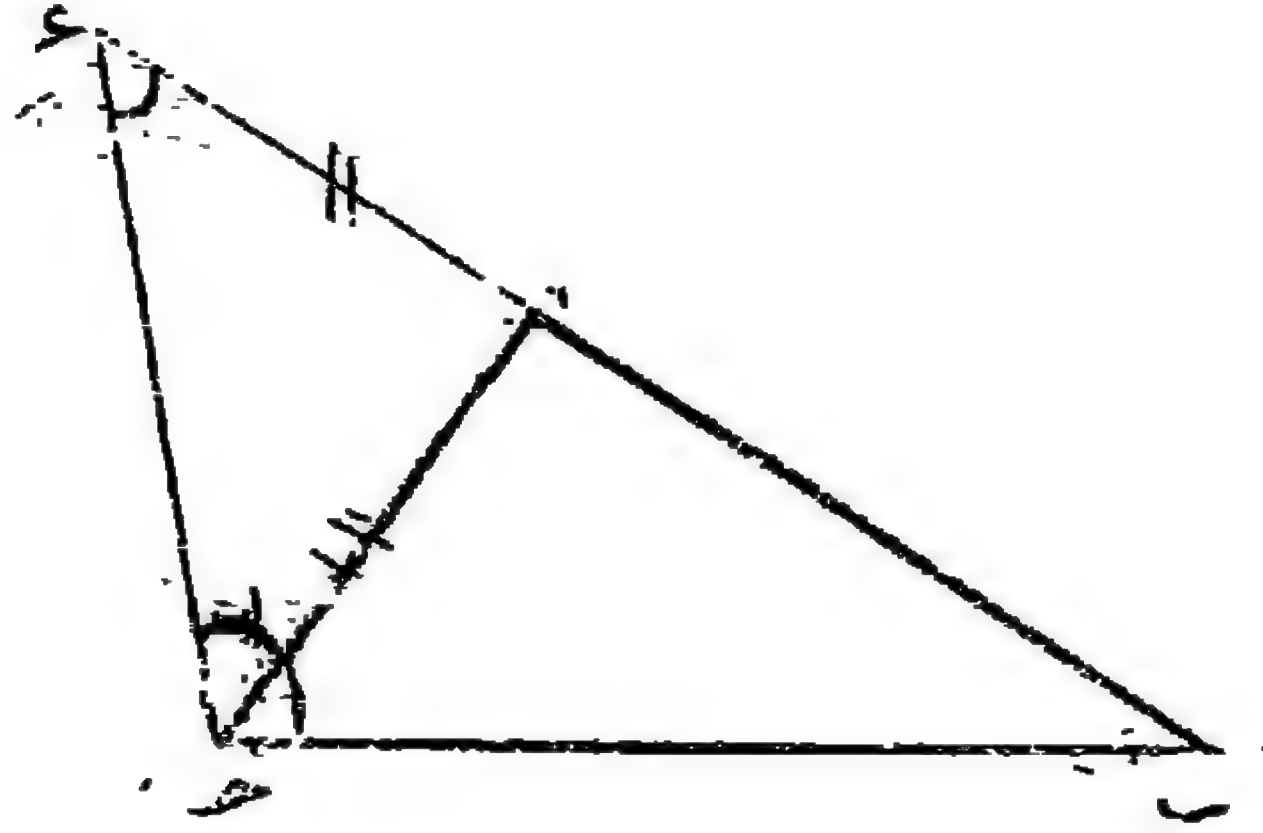
وعلى ذلك فالضلع $أ ب$ لا يمكن أن يساوي $أ ج$ كما أنه لا يمكن أن يكون أصغر منه

∴ $أ ب$ يجب أن يكون أكبر من $أ ج$ وهو المطلوب

(للتأريين على نظريتي ٩ ٦ ١٠ راجع صفحة ٣٨)

نظرية ١١

أى ضلع في المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين



إذا فرضنا أن $a > b + c$ مثلث

فانه يطلب اثبات أن أى ضلع فيه أصغر من مجموع ضلعيه الآخرين

فإذا كان $b > a + c$ أكبر ضلع في المثلث فانه يكفي أن يبرهن على أن مجموع $b + a > c$ أكبر منه

ولذلك نمدد b على استقامته ونأخذ على امتداده البعد $a = d$ ثم نصل c

البرهان — من حيث أن $a = d$

$\therefore d + a > d = a$ (نظرية ٥)

ولكن $d + b > d + c$ أكبر من $d + a$

$\therefore d + b > d + c$ أكبر من $d + a$ أى $d + b > c$

وعلى ذلك ففى $\triangle bcd$ يكون

$b + d > c$

(نظرية ١٠)

لكن $b + d = b + a$ مجموع $b + a > c$

$\therefore b > a + c$ أصغر من مجموع $b + a > c$ وهو المطلوب

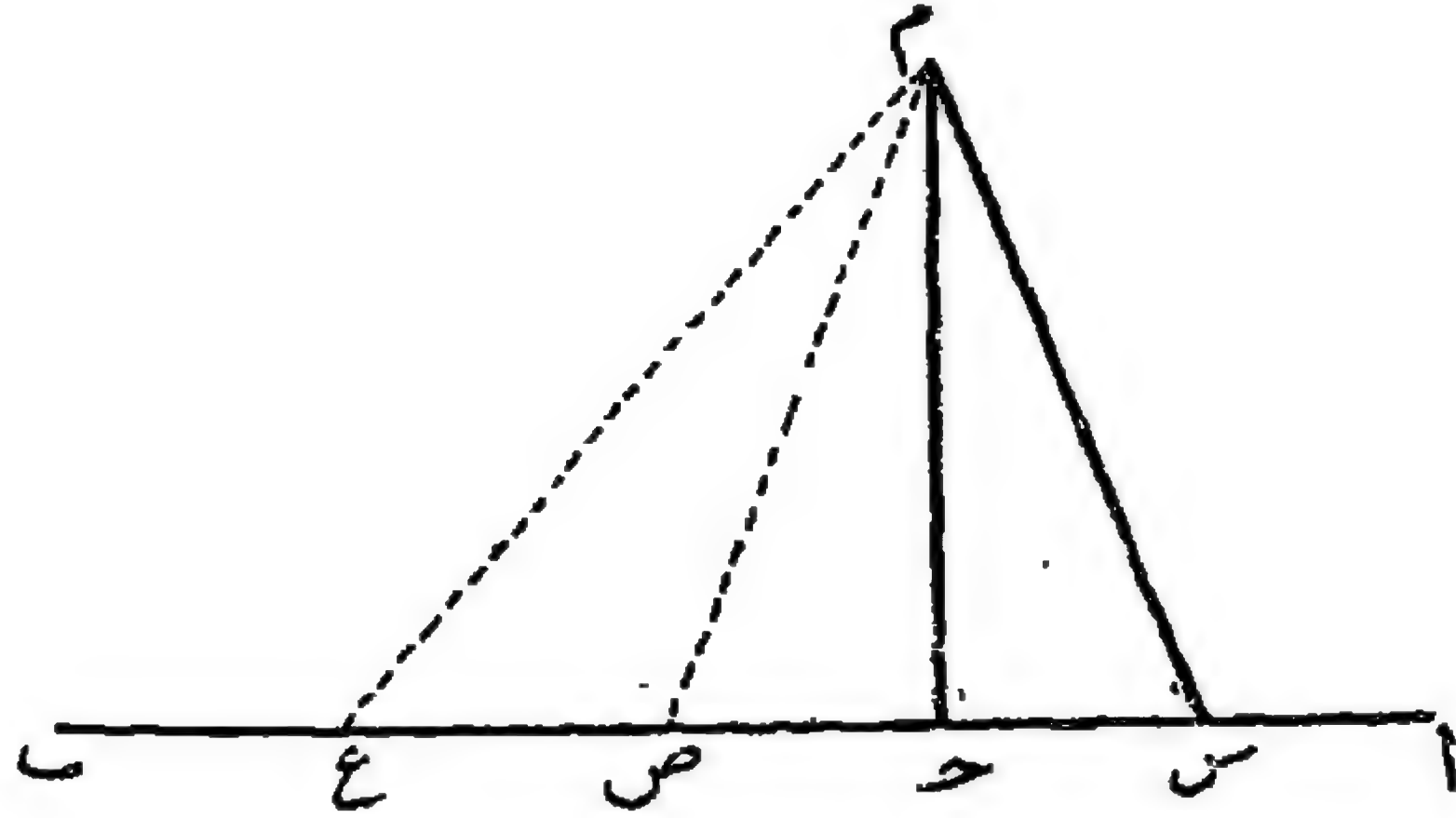
تنبيه — صحة هذه النظرية واضحة بلا اثبات وإنما أوردنا البرهان السابق تمريناً على ما تقدم من النظريات

أما وضوح صحة النظرية فلا أنه إذا تحركت نقطة من b الى c على المستقيم bc تقطع مسافة أقصر مما لو تحركت من b الى a ثم من a الى c وبعبارة أخرى

أقرب بعد بين نقطتين هو المستقيم الواصل بينهما

نظرية ١٢

العمود هو أقصر المستقيمات التي تخرج من نقطة مفروضة الى مستقيم معلوم



إذا فرضنا أن $m \perp h$ هو العمود النازل من النقطة المفروضة m على المستقيم المعلوم a وأن $m \perp s$ مائل كما واصل منها الى a

فانه يطلب اثبات ان $m \perp h$ أقصر من $m \perp s$

إبرهان — في المثلث $m \perp s$

من حيث ان $m \perp h$ قائمة

$\therefore m \perp s > m \perp h$ أصغر من قائمة (نتيجة نظرية ٨)

أي أن $m \perp s > m \perp h$ أصغر من $m \perp s$

$\therefore m \perp h$ أصغر من $m \perp s$ (نظرية ١٠)

وهو المطلوب

نتيجة ١ — وبالعكس : من حيث انه من نقطة مفروضة خارج مستقيم لا يمكن أن ينزل إلا عمود واحد عليه وأنه لا يمكن أن يوجد إلا مستقيم واحد أقصر من جميع المستقيمات الخارجة منها الى المستقيم المعلوم ينتج أنه

إذا كان $m \perp h$ أقصر المستقيمات الخارجة من m الى a فان

$m \perp h$ هو العمود النازل من m على a

نتيجة ٢ — المائلان $m \perp s$ و $m \perp v$ متساويان اذا لاقيا المستقيم المعلوم على بعدين متساويين من موقع العمود

أي أنه لو كان البعد $s \perp h$ = البعد $v \perp h$ لكان $m \perp s$ = $m \perp v$

لأن المثلثين $m \perp s$ و $m \perp v$ يمكن البرهنة على تطابقهما (نظرية ٤)

ومن ذلك ينتج ان $m \perp s$ = $m \perp v$

نتيجة ٣ — أى مائلين يخرجان من النقطة المفروضة ويلقيان المستقيم المعلوم على بعدين مختلفين من موقع العمود يكونان مختلفين وأكبرهما مالاقي المستقيم على بعد أكبر من الموقع المذكور

أى أنه إذا كان $\angle \text{ع أكبر من } \angle \text{ص}$ فالمائل $\text{م ع أكبر من المائل } \text{م ص}$

لأن $\angle \text{م ص } > \angle \text{حاده}$

$\therefore \angle \text{م ص ع منفرجة}$

$\therefore \angle \text{م ص ع أكبر من } \angle \text{م ع ص}$

$\therefore \text{م ع أكبر من } \text{م ص}$

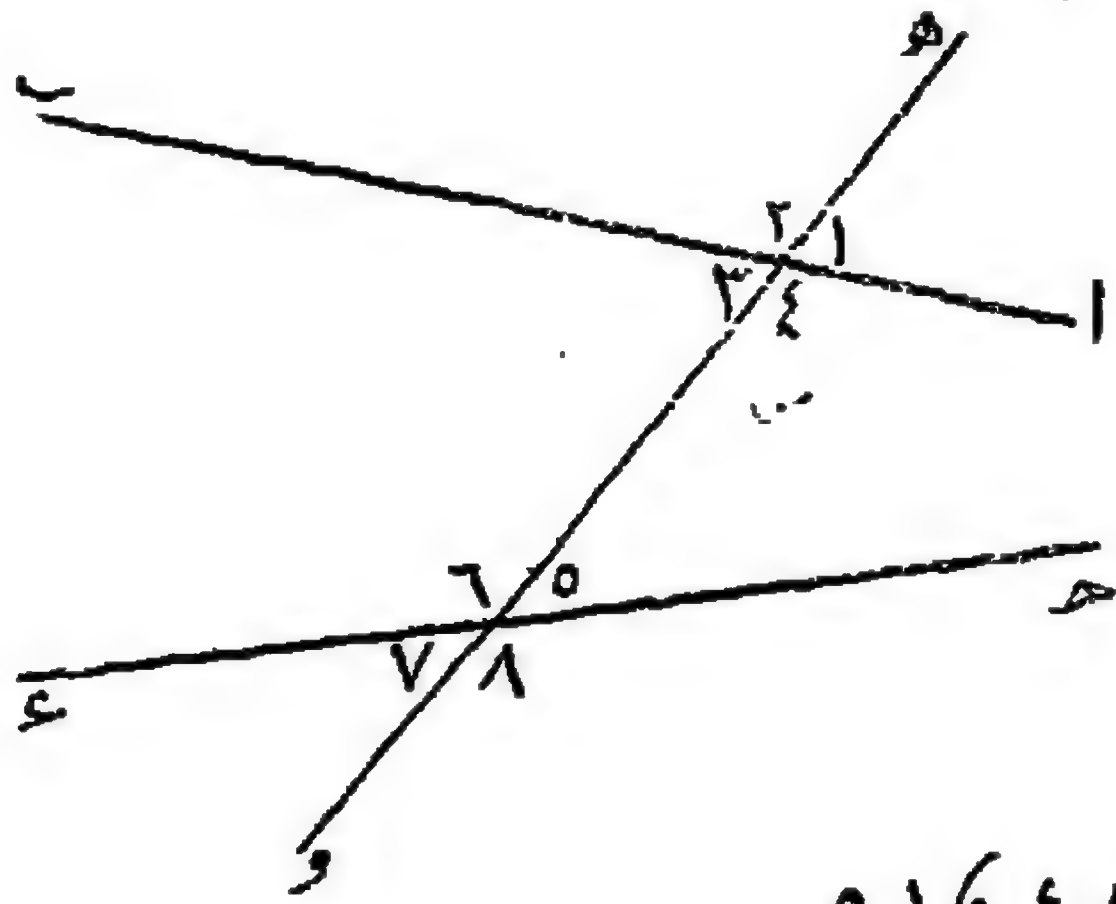
تمارين على اختلاف الأضلاع والزوايا في المثلث

- ١ في المثلث القائم الزاوية الوتر أكبر الأضلاع
- ٢ أكبر ضلع في المثلث يصنع مع كل من ضلعيه الآخرين زاوية حادة
- ٣ إذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها إلى طرفي أحد أضلاعه بمستقيمين كان مجموعهما أصغر من مجموع ضلعي المثلث المحيطين بهما
- ٤ $ا ب > ح$ مثلث متساوي الساقين فيه $ا ب = ا ح$ مدت قاعدته $ب ح$ على استقامتها واخذ على امتدادها نقطة ما مثل $د$ برهن على أن $ا د$ أكبر من كل من ساقى المثلث
- ٥ إذا كان أكبر الأضلاع وأصغرها في أى شكل رباعي متقابلين كان كل من الزاويتين المجاورتين للضلع الأصغر أكبر من التى تقابلها في الشكل المذكور
- ٦ في أى مثلث مثل $ا ب > ح$ إذا لم يكن $ا > ا ب$ أكبر من $ا ب$ فإن أى مستقيم واصل من الرأس $ا$ إلى أى نقطة في القاعدة $ب ح$ أصغر من $ا ب$
- ٧ إذا كان $ب م$ في المثلث $ا ب > ح$ منصف $د ب$ $د م$ منصف $د ح$ وكان $ا ب$ أكبر من $ح$ كان $ب م$ أكبر من $م$
- ٨ أى ضلع في المثلث أكبر من الفرق بين الضلعين الآخرين
- ٩ مجموع أبعاد أى نقطة عن رؤوس مثلث أكبر من نصف مجموع أضلاعه
- ١٠ مجموع أضلاع الشكل الرباعي أكبر من مجموع قطريه
- ١١ $ا ب > ح$ مثلث نصفنا زاوية رأسه $ا$ بمستقيم يقابل القاعدة $ب ح$ في $س$ برهن على أن $ا ب$ أكبر من $ب س$ وأن $ا > ا ب$ أكبر من $ح س$ ومن ذلك استنبط برهانا آخر لنظرية ١١
- ١٢ إذا فرضت نقطة داخل مثلث وصل منها إلى رؤوس زواياه بمستقيمات كان مجموع هذه المستقيمات أصغر من مجموع أضلاعه
- ١٣ برهن على أن مجموع قطري الشكل الرباعي أصغر من مجموع المستقيمات الأربعة الواصلة من أى نقطة مفروضة إلى رؤوس الشكل وبين الحالة التى لا يصح فيها ذلك
- ١٤ مجموع أى ضلعين في المثلث أكبر من ضعف المستقيم المتوسط المنصف للضلع الثالث
[مد المستقيم المتوسط على استقامته وأكمل الرسم كما في نظرية ٨]
- ١٥ مجموع المستقيمات المتوسطة في أى مثلث أصغر من مجموع أضلاعه

في المتوازيات

تعريف — المستقيمان المتوازيان هما اللذان يكونان في مستو واحد ولا يتلاقيان مهما امتدّا
تنبيه — يجب أن تكون المستقيمان المتوازيان في مستو واحد دائماً فإنا إذا رسمنا مستقيمين أحدهما
في مستو منضد مثلاً والآخر في مستو الأرض فإن هذين المستقيمين لا يلزم أن يلتقيا مهما امتدّا مع
نجواز كونهما غير متوازيين

بيديه — لا يمكن أن يكون المستقيمان المتقاطعان موازيين لثالث وبعبارة أخرى
لا يمكن أن يمد من نقطة مفروضة إلا مستقيم واحد يوازي آخر معلوما وتعرف هذه بيديه "بلايفير"
تعريف — إذا قطع المستقيم هـ و المستقيمين أ ب و ج فانه يحدث من هذا التقاطع ثمانى زوايا
تميز بأسماء خاصة



ففى الشكل

الزوايا ١، ٢، ٣، ٤ تسمى خارجة

والزوايا ٥، ٦، ٧، ٨ تسمى داخلية

والزاويتان ٢، ٤ تسميان متبادلتين

وكذلك الزاويتان ٥، ٣

ويقال للزاويتين ٢، ٥ انهما متناظرتان وكذلك ٣، ٧ و ٤، ٦ و ١، ٥

نظرية ١٣ .

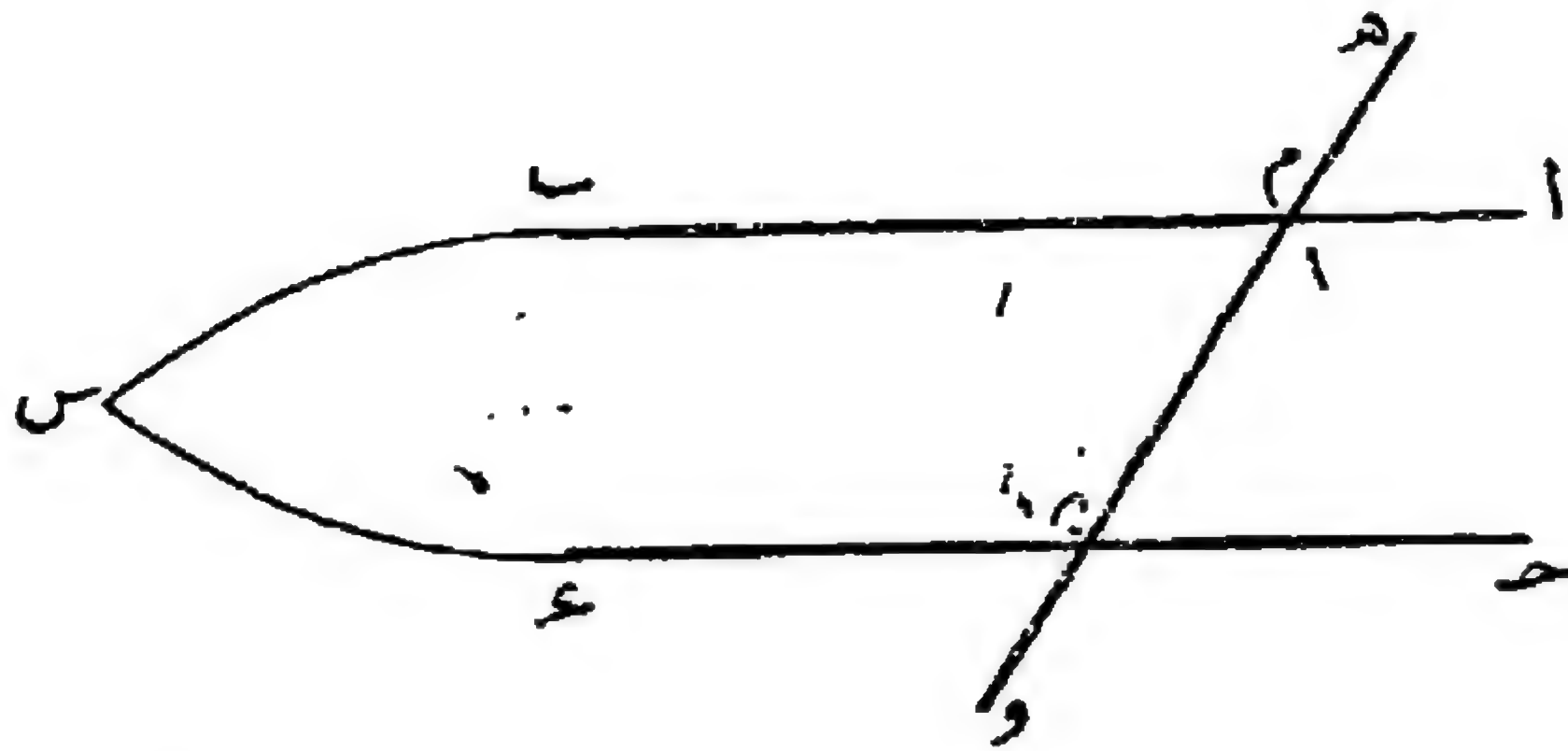
إذا قطع مستقيم مستقيمين وحدث من ذلك

(أولا) أن أى زاويتين متبادلتين متساويتان

أو (ثانيا) أن أى زاويتين متناظرتين متساويتان

أو (ثالثا) أن مجموع أى زاويتين داخليتين وفى جهة واحدة من القاطع يساوى قائمتين

كان المستقيمان فى أى حال من الأحوال الثلاثة متوازيين



(أولا) اذا فرضنا أن المستقيم هـ و يقطع المستقيمين ا ب و ج د فيكون $\angle م = \angle و$ وكانت الزاويتان المتبادلتان $\angle م = \angle و$ متساويتين

فانه يطلب اثبات أن ا ب يوازي ح د

البرهان — ان لم يكن ا ب متوازيين فانهما يتلاقيان اذا امتدّا من جهة ب و ا و ج د

فلو أمكن تلاقيهما فى النقطة س اذا امتدّا من جهة ب و ج د مثلاً لحدث أن س م $\angle م$ مثلث مد أحد أضلاعه س م على استقامته الى ا

∴ الزاوية الخارجة ا م $\angle م$ أكبر من $\angle م$ د س

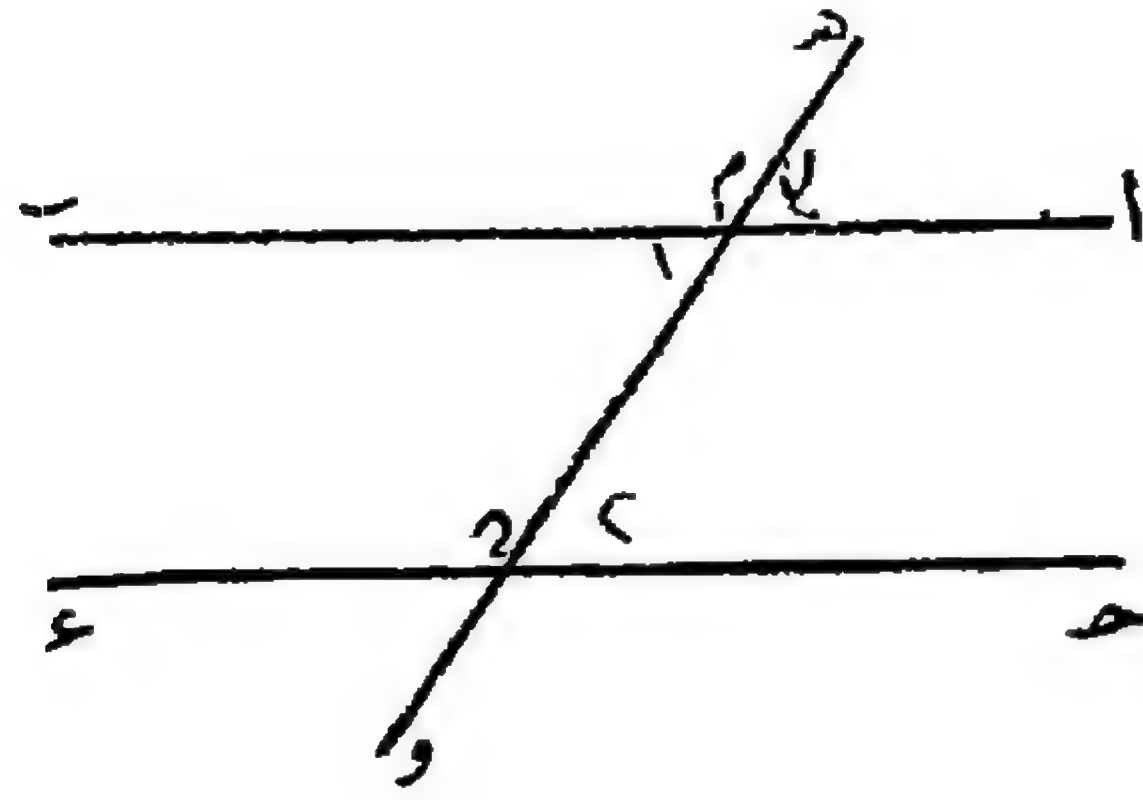
وهذا خلاف الفرض إذ أنهما متساويتان

وقد نشأ الخلاف من فرضنا تلاقى المستقيمين ا ب و ج د فى س

∴ لا يمكن تلاقيهما مهما امتدّا فى هذه الجهة

وبالطريقة عينها يثبت أنه لا يمكن تلاقيهما مهما امتدّا فى جهة ا ب و ج د

∴ المستقيم ا ب يوازي المستقيم ح د



(ثانيا) اذا فرضنا ان $\angle ١ = \angle ٢$ المناظرة لها $\angle ٣$

فانه يطلب اثبات ان $ا ب$ يوازي $و$

البرهان — من حيث ان $\angle ١ = \angle ٢$

ومن حيث ان $\angle ١ = \angle ٣$ لتقابلهما بالرأس

$\therefore \angle ٢ = \angle ٣$

وهاتان الزاويتان متبادلتان

$\therefore ا ب$ يوازي $و$

(ثالثا) اذا فرضنا ان مجموع الزاويتين $\angle ١ + \angle ٢ = ١٨٠^\circ$ يساوي قائمتين

فانه يطلب اثبات ان $ا ب$ يوازي $و$

البرهان — من حيث ان $\angle ١ + \angle ٢ = ١٨٠^\circ$ قائمتين

$\therefore \angle ١ + \angle ٢ = \angle ٣ + \angle ٤$

ويطرح $\angle ١$ من كل من طرفي هذه المتساوية ينتج ان الباقيين متساويان

أي أن $\angle ٢ = \angle ٣$

ومن حيث ان هاتين الزاويتين متبادلتان

$\therefore ا ب$ يوازي $و$ وهو المطلوب

تعريف — اذا قطع مستقيم مستقيمين أو جملة مستقيمية فانه يسمى بالقاطع

فمثلا المستقيم $هـ و$ في الشكل المتقدم قطع كلا من $ا ب$ و $ج د$ فيقال له القاطع

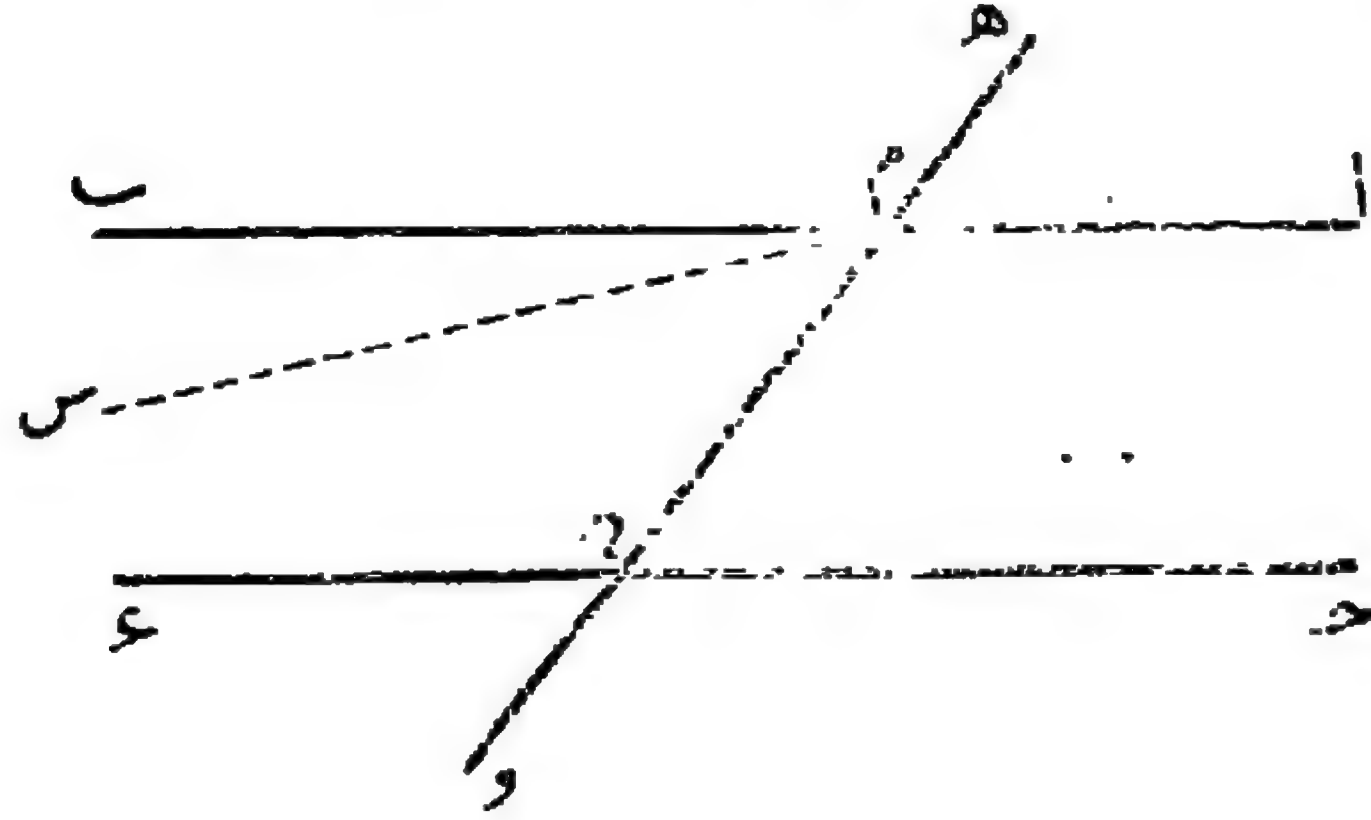
نظرية ١٤

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين يحدث

(أولاً) أن كل زاويتين متبادلتين متساويتان

(ثانياً) أن كل زاويتين متناظرتين متساويتان

(ثالثاً) أن مجموع كل زاويتين داخليتين في جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين



إذا فرضنا أن $ا ب$ و $ج د$ مستقيمان متوازيان وأن المستقيم $هـ م د$ و قاطع لهما فإنه يطلب اثبات

(أولاً) أن $د ب م د =$ المتبادلة معها $م د د$

(ثانياً) أن $د هـ م ا =$ المناظرة لها $م د د$

(ثالثاً) أن مجموع الزاويتين $ا م د$ و $م د د =$ قائمتين

البرهان - (أولاً) أن لم تكن $د ب م د = د م د$

فترض أن $د س م د$ هي التي تساوي $د م د$ وهاتان الزاويتان متبادلتان

∴ $م س$ يوازي $د$ (نظرية ١٣)

ولكن $ا ب$ يوازي $د$ بالفرض

∴ أمكن وجود مستقيمين متقاطعين يوازيان ثالثاً وهو $د$ وهذا محال (بديهية بلايفير)

∴ $د ب م د$ لا يمكن إلا أن تساوي $د م د$

أي أن الزاويتين المتبادلتين $ب م د$ و $م د د$ متساويتان

(ثانياً) من حيث أن $د هـ م ا = د ب م د$ للتعادل بالرأس

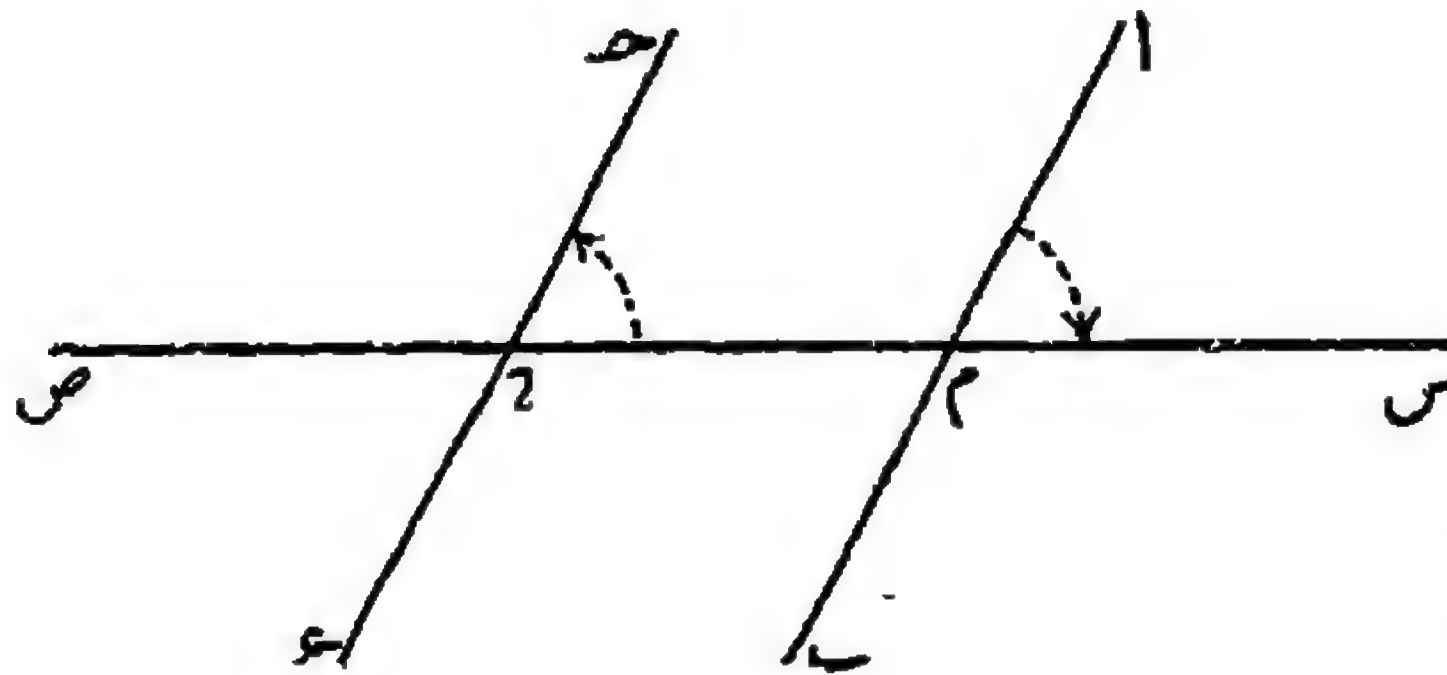
$د ب م د = د م د$ بالتبادل كما تقدم

∴ $د هـ م ا = د م د$ وهما متناظرتان

(ثالثا) من حيث أن $\angle م د ه = \angle م د ح$ بالتناظر كما تقدم
 فلو أضفنا إلى كل من طرفي هذه المتساوية $\angle م ا د$ لحدث أن الحاصلين متساويان
 أي أن $\angle م د ه + \angle م ا د = \angle م د ح + \angle م ا د$
 لكن $\angle م د ه + \angle م ا د = \angle م ا د ه$ قائمتين
 \therefore مجموع الزاويتين $\angle م ا د ه$ يساوي قائمتين وهو المطلوب

إيضاح المتوازيات بطريقة الدوران

انجاء أى مستقيم بالنسبة إلى آخر معلوم يعين بالزاوية التي يصنعها معه
 فمثلا اتجاه المستقيم $ا ب$ بالنسبة إلى المستقيم المعلوم $س ص$ يعين بالزاوية $\angle م ا س$



فاذا فرض أن $\angle م ا ب = \angle م د ح$ مستقيمان
 متوازيان فإن $\angle م ا س = \angle م د ح$
 بالتناظر أى أن $ا ب$ و $د ح$ يصنعان مع
 المستقيم المعلوم $س ص$ زاويتين متساويتين $س$
 ومن ذلك نستنتج الفكرة التي تؤدي إلى
 المستقيمتين المتوازيتين وهي اتحادها في الاتجاه
 مع اختلافها في الوضع

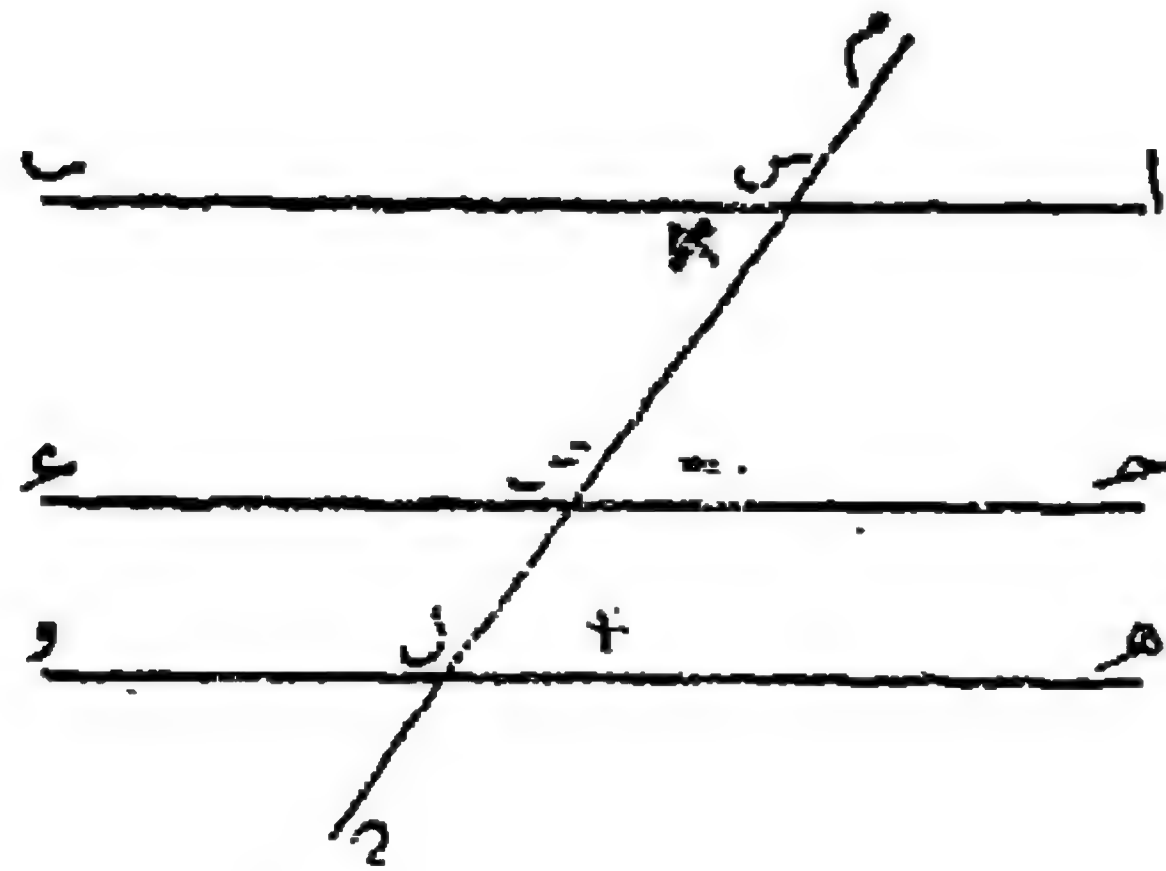
وذلك انا اذا تصورنا أن $ا ب$ دار حول $م$ بقدر $\angle م ا س$ فانه ينطبق على $س ص$
 ثم اذا تصورنا دورانه ثانيا من هذا الوضع $س ص$ حول نقطة أخرى مثل $د$ في الجهة المضادة
 لدورانه الأول حتى صنع الزاوية $\angle م د ح$ التي تساوي $\angle م ا س$ فانه يأخذ الوضع $د ح$ وهو خلاف
 الأول ويرجع فيه بهاتين الدورتين المتساويتين المتضادتين إلى اتجاهه الأول بعينه

فرض عملي — اذا فرض في الشكل المتقدم أن $ا ب$ مستقيم ثابت وأن $د$ نقطة ثابتة وأن $د ح$
 مستقيم آخر يدور حول النقطة $د$ وأن $ص ص$ قاطع مامار بالنقطة المذكورة فانه عند دوران
 $د ح$ حولها لا بد أن يكون له وضع واخيه فيه تكون $\angle م د ح = \angle م ا س$ الزاوية الثابتة $\angle م ا س$
 وفي هذه الحالة يكون $د ح$ موازيا لـ $ا ب$

وعلى ذلك يمكن أن نفرض دائما مد مستقيم من نقطة مفروضة يوازي آخر معلوما
 تنبيه — اذا تحركت نقطة على المستقيم $ا ب$ من $ا$ إلى $ب$ ثم من $ب$ إلى $ا$ فانه يقال لهاتين الحركتين
 انهما في اتجاهين متضادين

نظرية ١٥

المستقيمان الموازيان لثالث متوازيات

إذا فرضنا أن كلا من $ا ب$ و $ك د$ يوازي $هـ و$ فانه يطلب اثبات أن $ا ب$ يوازي $د هـ$ لذلك نرسم $م د$ قاطعا للمستقيمتين $ا ب$ في $س$ و $ك د$ في $ص$ و $هـ و$ في $ل$ البرهان — من حيث أن $ا ب$ و $ك د$ متوازيان $م د$ قاطع لهما

$$\therefore \angle ب س ل = \angle د س ل \text{ بالتبادل}$$

ومن حيث أن $ك د$ و $هـ و$ متوازيان $م د$ قاطع لهما

$$\therefore \angle م ص ح = \angle د ص ل \text{ بالتناظر}$$

$$\therefore \angle ب س ص = \angle د س ص$$

ومن حيث أن هاتين الزاويتين متبادلتان

$$\therefore ا ب \text{ يوازي } د هـ \text{ وهو المطلوب}$$

ملاحظة — إذا كان المستقيم $هـ و$ واقعا بين المستقيمين $ا ب$ و $ك د$ فان النظرية لا تحتاج الى

برهان لأنه لا يتصور أن يتلاقى مستقيمان لا يلاقى كل منهما مستقيما واقعا بينهما

ويمكن ان يبرهن على صحة هذه النظرية ببديهية "بلايفير" التي هي عكسها بأن يقال ان لم يكن

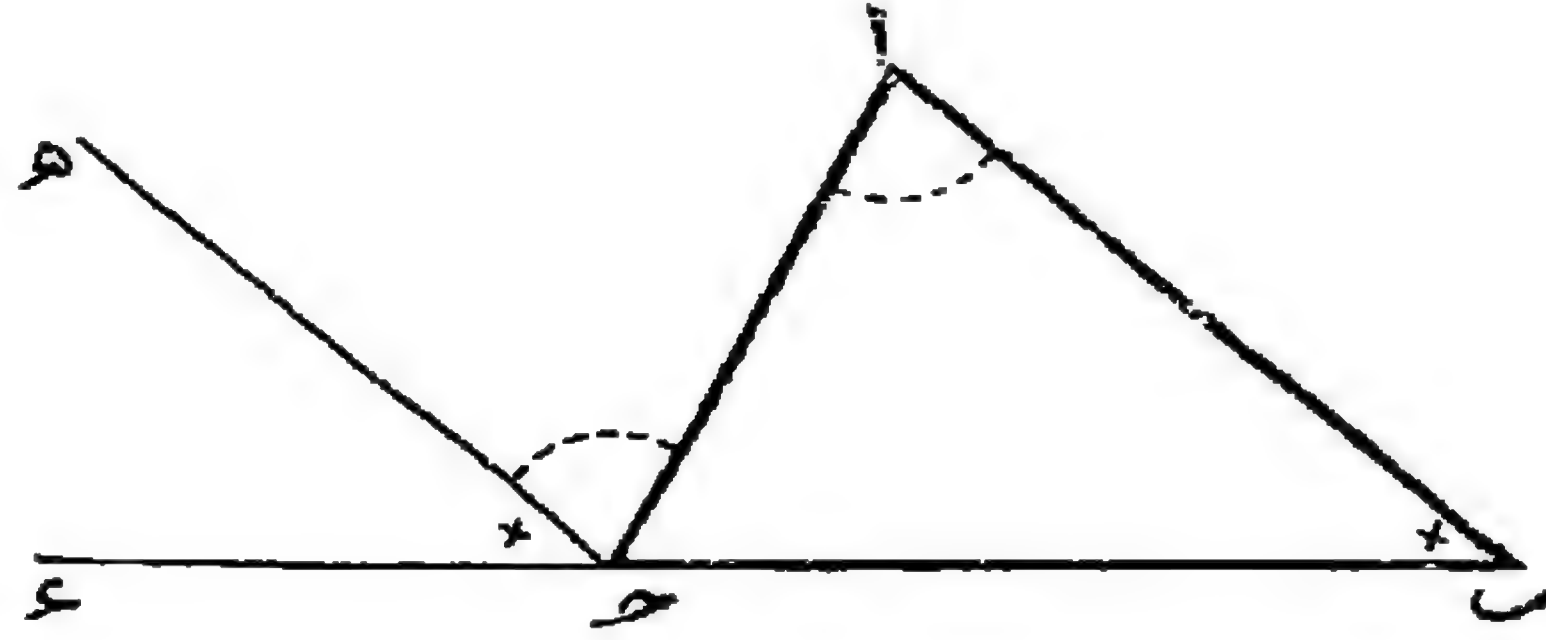
 $ا ب$ و $ك د$ متوازيين تلاقيا ويترتب على ذلك وجود مستقيمين متقاطعين وموازيين لثالث وهذا محالوعلى ذلك فالمستقيمان $ا ب$ و $ك د$ لا يلتقيان مهما امتدّا أي أنهما متوازيان

تمارين على المتوازيات

- ١ في شكل النظرية السابقة المطلوب تقدير درج كل من الزوايا $\angle د$ $\angle ل$ $\angle ك$ $\angle هـ$
 $\angle هـ$ $\angle ل$ مع العلم بأن $\angle م$ $\angle س$ $\angle ا = ٥٥$
- ٢ المستقيمان العمودان على ثالث متوازيان
- ٣ اذا قابل مستقيم متوازيين أو أكثر وكان عمودا على أحدها فانه يكون عمودا على الأخرى
- ٤ الزاويتان اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية تكونان إما متساويتين وإما متكاملتين
- ٥ المستقيمان $ا ب$ $ك د$ ينصف كل منهما الآخر في $م$ برهن على أنه اذا وصل من $ا$ الى $د$ ومن $د$ الى $ب$ فان $ا د$ $ك د$ يكونان متوازيين
- ٦ المستقيم الذي يقطع ساقى مثلث متساوى الساقين ويوازي قاعدته يكون مع الساقين زاويتين متساويتين
- ٧ اذا فرضت نقطة على منتصف أى زاوية ورسم منها مواز لأحد ضلعيها كان المثلث الحادث متساوى الساقين
- ٨ اذا فرضت نقطة مثل $س$ على قاعدة مثلث متساوى الساقين مثل $ا ب د$ وأقيم منها عمود يقطع $ب ا$ في $ص$ وامتداد $د ا$ في $ع$ فانه يطلب البرهنة على أن المثلث $ا ص ع$ متساوى الساقين
- ٩ اذا كان المنصف لزاوية خارجة لمثلث موازيا للضلع المقابل لمجاورتها فان المثلث يكون متساوى الساقين
- ١٠ اذا رسم من نقطة على منتصف زاوية مستقيمان يوازيان ضلعيها ويتهيان بهما فان هذين المستقيمين يكونان متساويين ويكون الشكل الحادث معيناً
- ١١ اذا تقاطع المستقيمان $د ك$ $ا ب$ في نقطة $د$ ونصفت كل من الزاويتين المتجاورتين $ا د$ $ك ب$ $د$ ثم فرضت نقطة مامثل $س$ على $د ك$ ورسم منها مستقيم مواز $ا ب$ وقاطع المنصفين في $ص ك$ فانه يراد إثبات أن $س ص = س ع$
- ١٢ القضيبيان $ا س$ $ب د$ يتحرك أحدهما حول الوتر $س$ والآخر حول الوتر $هـ$ ويدور الأول ١٢ دورة في الدقيقة والثاني ١٠ دورات في الدقيقة فاذا ابتداء دوران من وضعين كانا فيهما متوازيين وفي اتجاه واحد فما هو الزمن الذي يمضي حتى يكونا متوازيين مرة أخرى وذلك (أولاً) في احالة ختلاف اتجاههما و (ثانياً) في حالة اتحاده

نظرية ١٦

مجموع زوايا المثلث الداخلة يساوى زاويتين قائمتين



إذا فرضنا أن $\angle ا ب ج$ مثلث

فانه يطلب اثبات أن مجموع الزوايا $\angle ا ب ج + \angle ب ج ا + \angle ج ا ب =$ قائمتين.

لذلك نمد $ب ج$ على استقامته الى نقطة ما مثل $د$ ونفرض أن $ج هـ$ يوازي $ب ا$

البرهان — من حيث ان $ب ا ج$ $ج هـ د$ متوازيان $\angle ا ب ج$ $\angle ج هـ د$ قاطع لهما

$\therefore \angle ب ا ج = \angle ج هـ د$ بالتبادل

ومن حيث ان $ب ا ج$ $ج هـ د$ متوازيان $\angle ب ج ا$ $\angle ج هـ د$ قاطع لهما

$\therefore \angle ب ج ا = \angle ج هـ د$ بالتناظر

\therefore الزاوية الخارجة الكلية $\angle ا ج د =$ مجموع الزاويتين الداخلتين $\angle ا ب ج + \angle ب ج ا$ وبإضافة

$\angle ج ا ب$ الى كل من طرفي هذه المتساوية يحدث أن

$$\angle ا ج د + \angle ج ا ب = \angle ا ب ج + \angle ب ج ا + \angle ج ا ب$$

لكن $\angle ا ج د + \angle ج ا ب =$ قائمتين

\therefore مجموع الزوايا $\angle ا ب ج + \angle ب ج ا + \angle ج ا ب =$ قائمتين وهو المطلوب

ملاحظة — تستنتج من سير البرهان المتقدم الخاصة الهامة الآتية وهي أنه

إذا مده أحد أضلاع المثلث على استقامته فان الزاوية الخارجة الحادثة تساوى مجموع الزاويتين

الداخلتين غير المجاورة

أى أن الزاوية الخارجة $\angle ا ج د = \angle ا ب ج + \angle ب ج ا$

(استنتاجات من نظرية ١٦)

١ لو فرض أن $\angle ا ب ج + \angle ب ج ا + \angle ج ا ب$ رموز لدرج زوايا المثلث لحدث أن

$$ا + ب + ج = ١٨٠^\circ$$

٢ إذا ساهمت زاويتان من مثلث نظيرتيهما من مثلث آخر فان الزاوية الثالثة من المثلث الأول

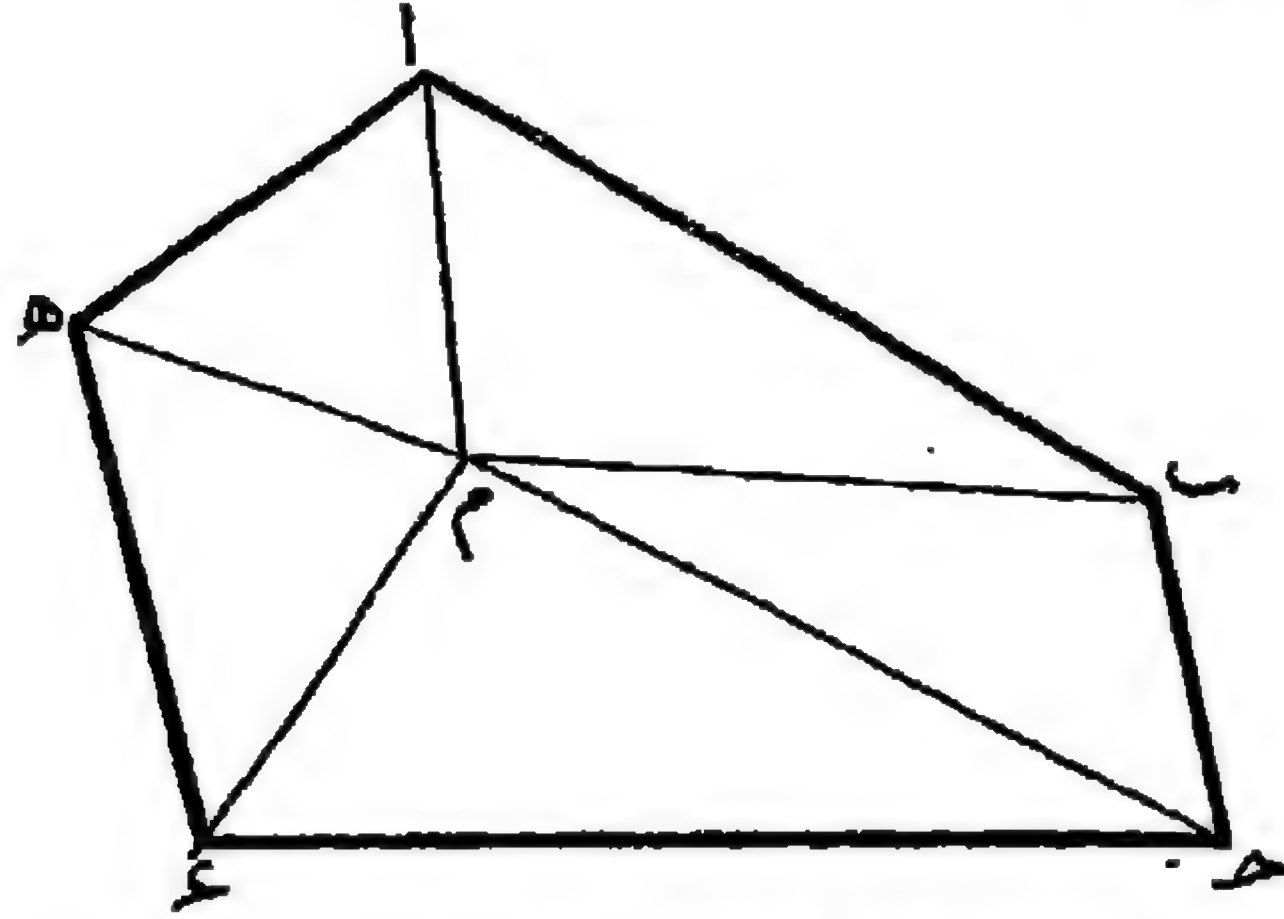
لابد أن تساوى نظيرتها من المثلث الثانى

- ٣ في المثلث القائم الزاوية زاويتاه الحادتان متتامتان
- ٤ اذا ساوت زاوية في مثلث مجموع زاويتيہ الأخرين كان المثلث قائم الزاوية
- ٥ مجموع زوايا أى شكل رباعى يساوى أربع قوائم

تمارين على نظرية ١٦

- ١ كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى الأضلاع تساوى ثلثي قائمه أو 90°
- ٢ اذا كان المثلث القائم الزاوية متساوى الساقين كانت كل زاوية من زاويتيہ المتساويتين 45°
- ٣ المعلوم مثلث احدى زواياه تساوى 36° والأخرى 123° والمطلوب ايجاد مقدار الزاوية الثالثة وتحقيقه بالقياس
- ٤ $\angle A = 111^\circ$ $\angle B = 6^\circ$ $\angle C = 42^\circ$ ويراد ايجاد مقدار $\angle D$ وتحقيق الناتج بالقياس
- ٥ اذا مدّ الضلع BC من المثلث ABC على استقامته الى D وكانت الزاوية الخارجة $\angle ACD = 134^\circ$ $\angle B = 6^\circ$ $\angle A = 42^\circ$ فانه يطلب ايجاد مقدار كل من الزاويتين الداخلتين الباقيتين
- ٦ في شكل نظرية ١٦ اذا كانت $\angle A = 118^\circ$ $\angle B = 6^\circ$ $\angle C = 51^\circ$ فانه يراد ايجاد مقدار كل من الزاويتين $\angle D$ $\angle E$ مع تحقيق ذلك بالقياس
- ٧ المطلوب إثبات أن زوايا المثلث تساوى قائمتين بفرض رسم مستقيم يمر برأس المثلث ويوازي القاعدة
- ٨ اذا تقاطع مستقيمان وأقيم على كل عمود فالزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين تساوى الزاوية الحادة المحصورة بين العمودين

نتيجة ١ - مجموع الزوايا الداخلة لأي شكل كثير الأضلاع مضافا اليه أربع قوائم يساوى من القوائم بقدر ضعف عدد الأضلاع



إذا فرضنا أن $أ ب ج د هـ$ شكل كثير الأضلاع وأن عدد أضلاعه ٥ فإنه يطلب اثبات أن زواياه الداخلة $+ ٤$ قوائم $= ٢$ من الزوايا القوائم لذلك نفرض نقطة ما مثل م داخل الشكل ونصل منها الى رؤوسه بمستقييات فينقسم الشكل بهذه المستقييات الى مثلثات عددها ٥

ومن حيث ان مجموع زوايا كل مثلث $=$ قائمتين

فمجموع زوايا كل المثلثات $= ٢$ من القوائم

ولكن زواياها هي زوايا الشكل الداخلة والزوايا المجمعة في نقطة م التي تساوى ٤ قوائم \therefore زوايا الشكل الداخلة $+ ٤$ قوائم $= ٢$ من القوائم وهو المطلوب

تعريف - كثير الأضلاع المنتظم أو المضلع المنتظم هو شكل تساوت أضلاعه وزواياه فإذا رمزنا بالحرف $د$ لمقدار درج كل زاوية من أى مضلع منتظم عدد أضلاعه ٥ يحدث أن

$$١٨٠ \times ٥ = ٣٦٠ + د \times ٥$$

(مسألة)

المطلوب إيجاد مقدار زاوية كثير الأضلاع المنتظم اذا كان

(١) سدسا (ذا ستة أضلاع)

(٢) ثمنا (ذا ثمانية أضلاع)

(٣) معشرا (ذا عشرة أضلاع)

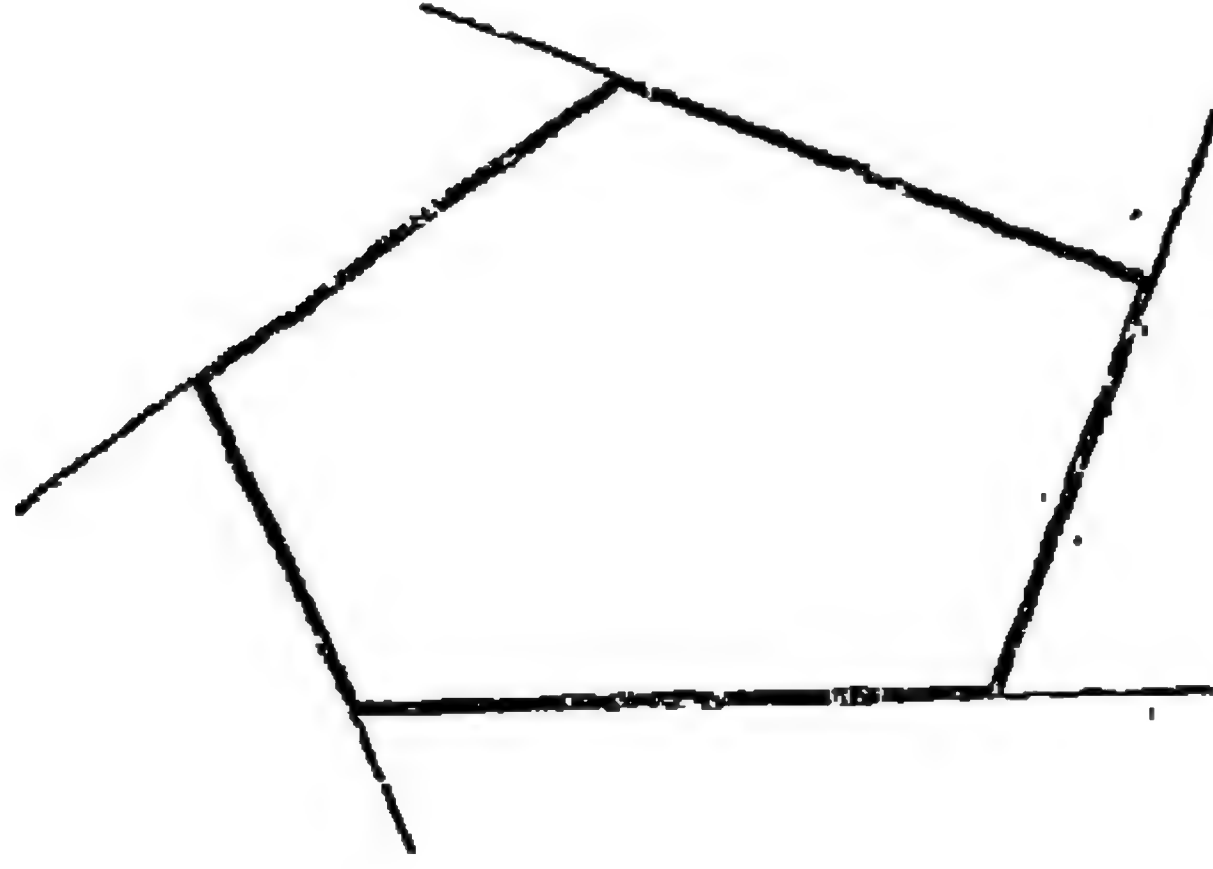
تمارين على نظرية ١٦

(عددية وتخطيطية)

١ أ ب ج د هـ مثلث فيه د ب ضعف د ا ٦ د ج ثلاثة أمثال د ا ويراد إيجاد مقدار كل زاوية من زوايا هذا المثلث بالدرج

- ٢ المطلوب إيجاد مقدار كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الساقين بالدرج عند ما تكون
(أولاً) كل من زاويتي القاعدة مثل زاوية الرأس
(ثانياً) كل من زاويتي القاعدة أربعة أمثال زاوية الرأس
- ٣ المعلوم مثلث مدت قاعدته على استقامتها في كلتا جهتيها وكانت الزاويتان الخارجتان الحادتان
٩٤ ٦ ١٢٦° والمطلوب معرفة زاوية الرأس ثم رسم المثلث وتحقيق ذلك بالقياس
- ٤ مجموع زاويتي القاعدة في مثلث ١٦٢° والفرق بينهما ٦٠° ويراد معرفة كل زاوية على حدها
- ٥ إذا ساوت زاويتا القاعدة من مثلث ٨٤° ٦ ٦٢° فإنه يراد إيجاد
(أولاً) زاوية الرأس (ثانياً) الزاوية المحصورة بين منصفى زاويتي القاعدة ثم رسم المثلث وتحقيق ذلك بالقياس
- ٦ أ ب ح مثلث فيه د ب = ٧٤ ٦ د ح = ٦٢ مد كل من أ ب ١٦ ح على استقامته ويراد معرفة الزاوية المحصورة بين منصفى الزاويتين الخارجتين الحادثتين مع تحقيق ذلك بالرسم .
- ٧ شكل رباعي احدى زواياه تساوى ١١٤ ١/٢° والثانية ٥٠° والثالثة ٧٥ ١/٢° فما مقدار الزاوية
- ٨ أ ب ح د شكل رباعي فيه د ب = ١ د ٢ = ١ د ٦ = ١ د ٣ = ١ د ٤ = ١ د ٤ = ١ د ٤ فما مقدار كل زاوية على حدها
- ٩ احدى زوايا خمس غير منتظم تساوى ٤٠° والثانية ٧٨° والثالثة ١٢٢° والرابعة ١٣٥° فما مقدار الخامسة
- ١٠ إذا كان د رمزاً لعدد أضلاع مضلع منتظم كان مقدار أى زاوية من زواياه يساوى من القوائم بقدر $\frac{2(2-d)}{d}$ ويراد
- (أولاً) استخراج هذا القانون من نتيجة ١ المتقدمة
(ثانياً) البرهنة على هذا القانون بدون واسطة النتيجة المذكورة وذلك بأن يوصل من أحد رؤوس الشكل الى رؤوسه الأخرى بمستقييات (ماعدات الرأسين المجاورين) وبذلك ينقسم الشكل الى مثلثات عددها د - ٢
- ١١ كم أضلاع الشكل المنتظم اذا كانت زاويته (أولاً) ١٠٨° (ثانياً) ١٥٦°
- ١٢ الأشكال المنتظمة التي يمكن وضعها بحيث تشترك جميعها في رأس ويتحد كل اثنين منها في ضلع ويتكون من وضعها على هذه الكيفية سطح مستو لا تخرج عن
- (أولاً) مثلثات متساوية الأضلاع (ثانياً) مربعات (ثالثاً) مسدسات منتظمة

نتيجة ٢ - في أى مضلع محدب إذا مد كل ضلع من أضلاعه على استقامته من جهة واحدة في ترتيب واحد كان مجموع الزوايا الخارجة الحادثة يساوى أربع قوائم (المضلع المحدب هو الذى إذا مد أى ضلع من أضلاعه يجعل الشكل كله فى احدى جهتيه)



وللبرهنة على ذلك طريقتان

الأولى: - إذا فرض أن عدد أضلاع الشكل = n

فعدد رؤوسه = n كذلك

ومعلوم أن فى كل رأس من رؤوس الشكل

الزاوية الداخلة + الزاوية الخارجة = 2 قوائم

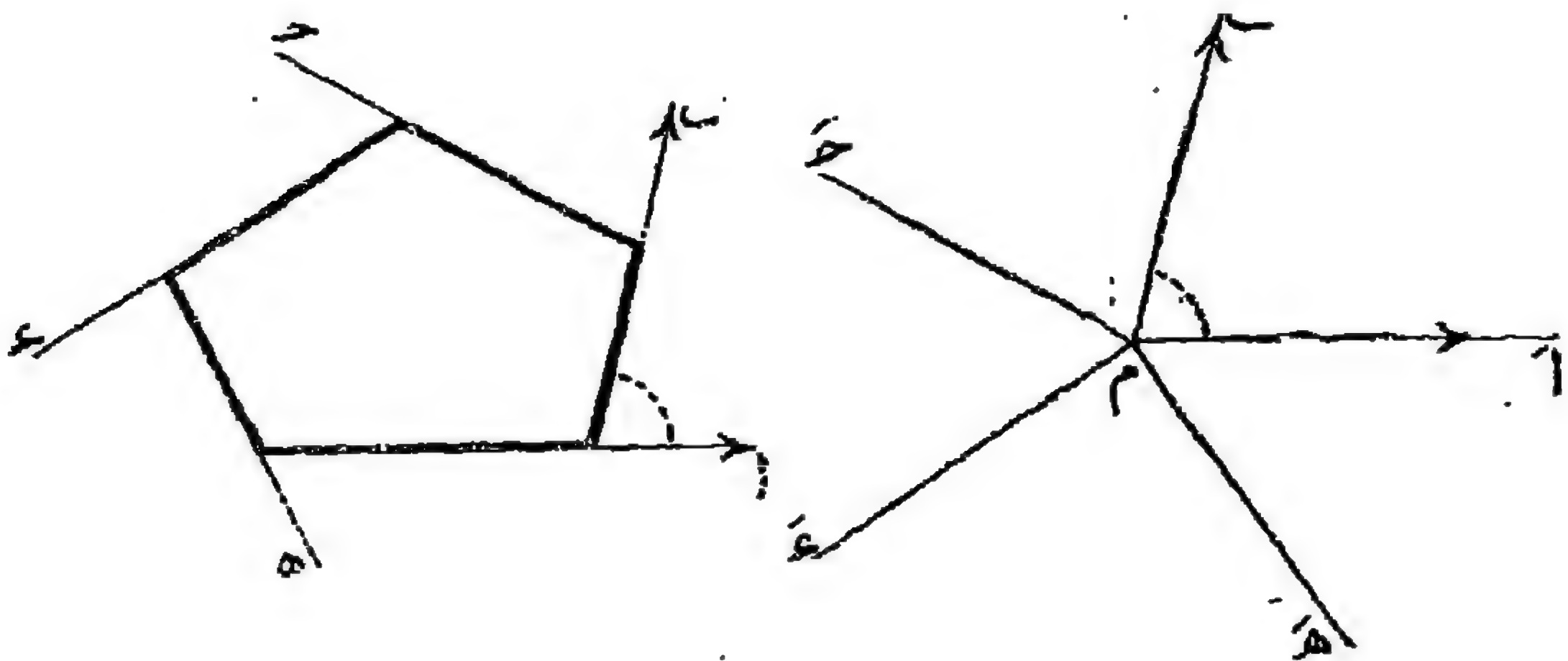
ومن حيث ان عدد رؤوس الشكل = n

∴ مجموع الزوايا الداخلة + مجموع الزوايا الخارجة = $2n$ قوائم

لكن مجموع الزوايا الداخلة + 4 قوائم = $2n$ قوائم (نتيجة ١)

∴ مجموع الزوايا الخارجة = 4 قوائم وهو المطلوب

الثانية -



م ٦ م ٥ م ٤ م ٣ م ٢ م ١ موازية على الترتيب لأضلاع الشكل المرموز لها
بالحروف ا ب ج د هـ وفي اتجاهها

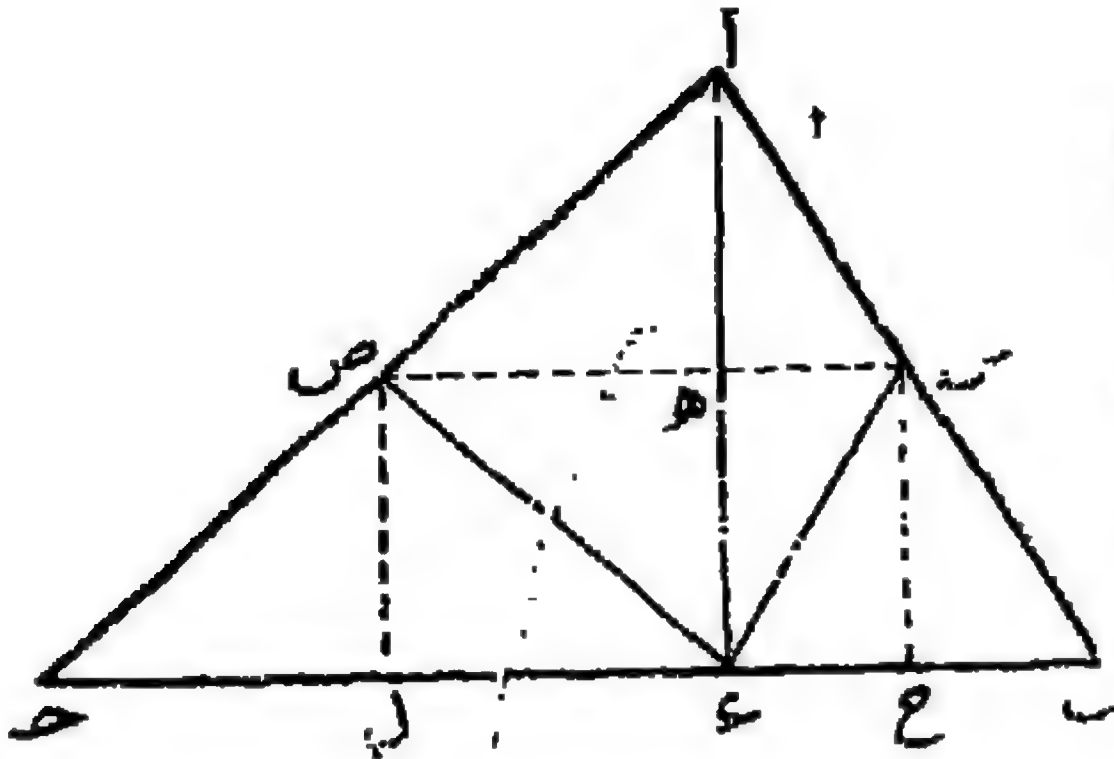
وكذلك الزوايا الخارجة الأخرى للشكل = $\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{G} = \widehat{H} = \widehat{I} = \widehat{J} = \widehat{K} = \widehat{L} = \widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{O} = \widehat{P} = \widehat{Q} = \widehat{R} = \widehat{S} = \widehat{T} = \widehat{U} = \widehat{V} = \widehat{W} = \widehat{X} = \widehat{Y} = \widehat{Z} = \widehat{A}$ كل لنظيرتها

= ٤ قوائم وهو المطلوب

تمارين

- ١ إذا مد أحد أضلاع المسدس المنتظم على استقامته فانه يراد اثبات أن الزاوية الخارجة تساوى الزاوية الداخلة للثلث المتساوى الأضلاع
 - ٢ المطلوب معرفة مقدار الزاوية الخارجة بالدرج (أولاً) للثمن المنتظم (ثانياً) للعشر المنتظم
 - ٣ كم أضلاع الشكل المنتظم اذا كانت كل زاوية من زواياه الخارجة (أولاً) ٣٠ (ثانياً) ٢٤°
 - ٤ اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فانه يطلب اثبات أن منصفى الزاويتين الداخلتين اللتين فى جهة واحدة من القاطع متعامدان
 - ٥ اذا مدت قاعدة مثلث على استقامتها فى جهتيها فانه يراد اثبات أن مجموع الزاويتين الخارجتين مطروحا منه زاوية الرأس يساوى قائمتين
 - ٦ ا ب ح مثلث نصفنا زاويتي قاعدته ب ٦ ح بالمستقيمين ب ي ٦ ح ي برهن على أن $\frac{1}{2} + 90 = \frac{1}{2}$
 - ٧ ا ب ح مثلث مددنا ضلعيه ا ب ٦ ا ح على استقامته ونصفنا الزاويتين الخارجتين الحادتين بالمستقيمين ب ي ٦ ح ي برهن على أن $\frac{1}{2} - 90 = \frac{1}{2}$
 - ٨ الزاوية المحصورة بين منصفى زاويتين متجاورتين فى أى شكل رباعى تساوى نصف مجموع الزاويتين الأخرين
 - ٩ ا ب ح مثلث متساوى الساقين رأسه ا مد ضلعه ا ح على استقامته الى د بحيث ان ا د = ا ح ثم وصل د ب برهن على أن د ب ح قائمة
 - ١٠ المستقيم الواصل من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية الى منتصف الوتر يساوى نصف الوتر
- برهان عملى لنظرية ١٦ [$180 = \alpha + \beta + \gamma$]

ليكن ا ب ح هو المثلث المعلوم



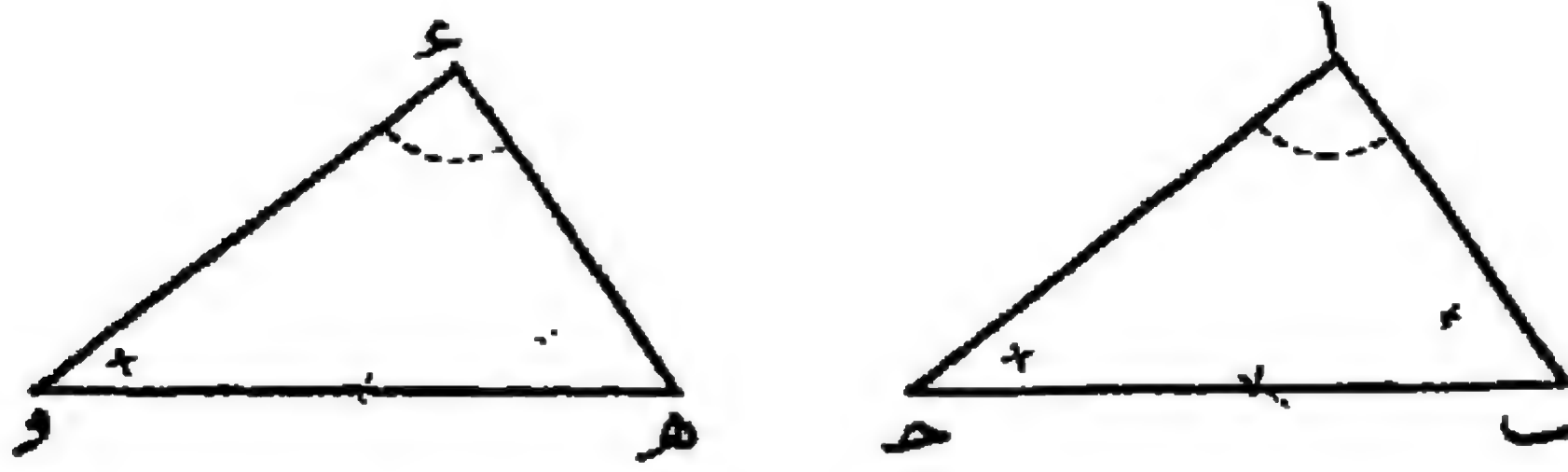
نتزل من ا العمود ا د على ب ح الذى هو أكبر الأضلاع
ثم نتصف هذا العمود فى النقطة ه وقيم منها العمود
س ه ص على ا د قاطعا الضلع ا ب فى س والضلع ا ح
فى ص ثم نتزل من س ٦ ص العمودين س ع
٦ ص ل على ب ح

ثم نطوى المثلث ا ب ح عند كل من س ص ٦ س ع ٦ ص ل فتأخذ ا / الوضع س د ص
٦ د ب الوضع س د ع ٦ د ح الوضع ص د ل

وهذه الزوايا مجتمعة فى د على ح ل فمجموعها يساوى ٢ ص وهو المطلوب

نظرية ١٧

ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى في أحدهما زاويتان وضلع نظائرها في الثاني



اذا فرضنا أن $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مثلثان فيهما

$$\angle A = \angle D$$

$$\angle B = \angle E$$

والضلع $BC = EF$

فانه يطلب اثبات أن $\triangle ABC$ ينطبق على $\triangle DEF$ تمام الانطباق

البرهان - من حيث ان مجموع الزوايا $\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$ (نظرية ١٦)

$$= \text{مجموع الزوايا } \angle C + \angle F$$

ومن حيث ان الزاويتين $\angle A$ و $\angle D$ تساويان الزاويتين $\angle B$ و $\angle E$

$$\therefore \angle C = \angle F$$

فاذا طبقنا $\triangle ABC$ على $\triangle DEF$

على شرط أن يقع الضلع BC على مساويه EF

فمن حيث ان $\angle B = \angle E$

\therefore $\angle A$ يقع على اتجاه $\angle D$

ومن حيث ان $\angle C = \angle F$

\therefore $\angle B$ يقع على اتجاه $\angle E$

ويؤخذ من ذلك ان نقطة A تقع في آن واحد على احدى نقطتي D وعلى احدى نقطتي E

وهذا لا يتأتى إلا اذا وقعت على نقطة تقاطعها D

\therefore ينطبق $\triangle ABC$ على $\triangle DEF$ تمام الانطباق

ويكون $AB = DE$ و $AC = DF$

ويكون $\triangle ABC = \triangle DEF$ في المساحة وهو المطلوب

تمارين على تطابق المثلثات

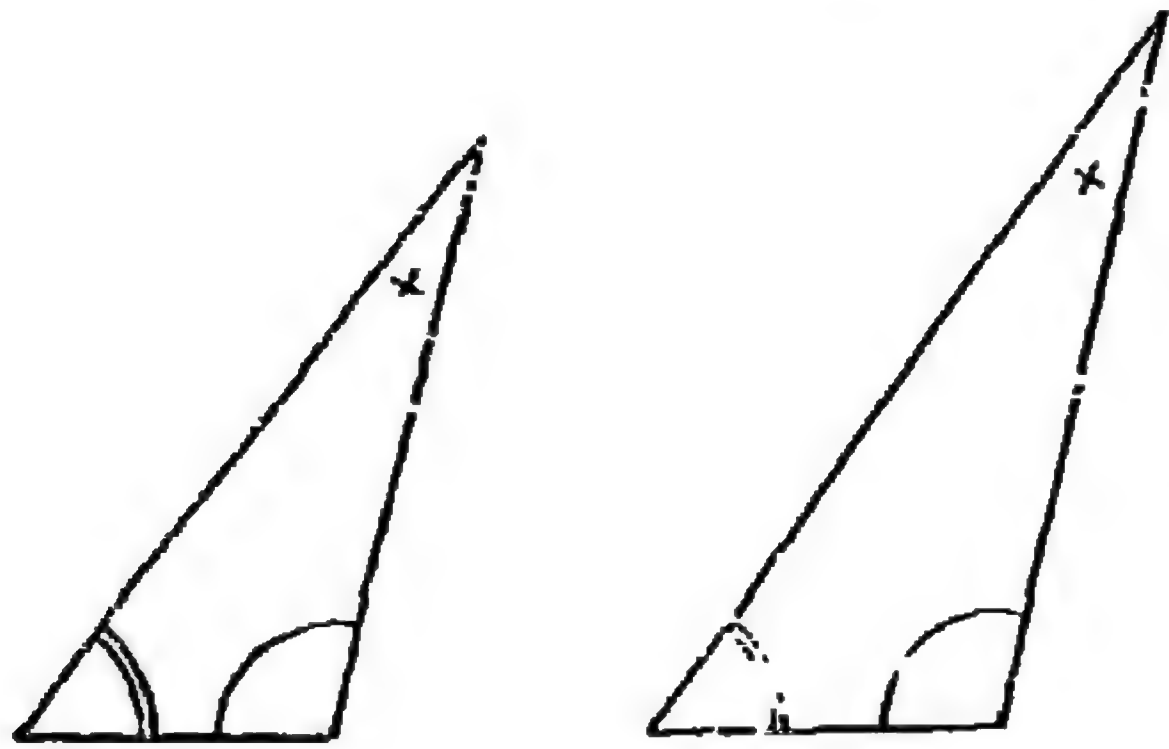
- ١ برهن على أن العمودين النازلين من نهايتي قاعدة مثلث متساوي الساقين على ساقيه متساويان
 - ٢ كل نقطة من نقط منتصف أى زاوية على بعدين متساويين من ضلعها
 - ٣ نقطة م منتصف المستقيم ا ب برهن على أن العمودين ا س و ب ص النازلين من ا و ب على أى مستقيم آخر مار بالنقطة م متساويان
 - ٤ اذا كان منتصف زاوية الرأس فى المثلث عمودا على القاعدة كان المثلث متساوى الساقين
 - ٥ اذا كان العمود النازل من رأس المثلث منصف لقاعدته كان المثلث متساوى الساقين
 - ٦ اذا كان منتصف زاوية الرأس فى المثلث منصف لقاعدته أيضا كان المثلث متساوى الساقين
- [لذلك نمد المنصف على استقامته وتم العمل كما فى نظرية ٨]
- ٧ نقطة تنصيف أى مستقيم طرفاه على مستقيمين متوازيين تكون على بعدين متساويين منهما
 - ٨ نقطة تنصيف أى مستقيم طرفاه على مستقيمين متوازيين تنصف أى مستقيم آخر يمر بها طرفاه على المتوازيين
 - ٩ اذا فرضت نقطة على بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين ورسم قاطعان يمران بها فان جزأى المتوازيين المحصورين بين هذين القاطعين متساويان
 - ١٠ ا ب و د شكل رباعى فيه الضلع ا ب = الضلع ا د والضلع ب د = الضلع د و
برهن على أن القطر ا د ينصف كلا من الزاويتين ا و ب ويكون عمودا على القطر الأخرى د
 - ١١ أراد مهندس أن يعين عرض نهر لا يمكنه أن يعبره فوقف فى نقطة مثل ا على الشاطئ ورأى أمامه على الشاطئ الآخر الشجرة ب فتصور مستقيمين ا ب و ب و مشى من ا على خط مستقيم عمودى على ا ب حتى وصل الى نقطة أخرى مثل د ثم نصف المسافة بين ا و ب فى نقطة م ووضع فيها قامة ثم مشى من د على خط مستقيم عمودى على ا د الى نقطة د حيث رأى أنه على امتداد المستقيم الواصل من الشجرة الى القامة ثم قاس المسافة د و برهن على أن هذه المسافة يساوى عرض النهر

في تطابق المثلثين

نرى مما تقدم في النظريات ٤ و ٧ و ١٧ أن هناك ثلاثة أحوال لانطباق المثلثين نلخصها فيما يأتي ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوت ثلاثة أجزاء من أحدهما نظائرها من الآخر على الوجه الآتي

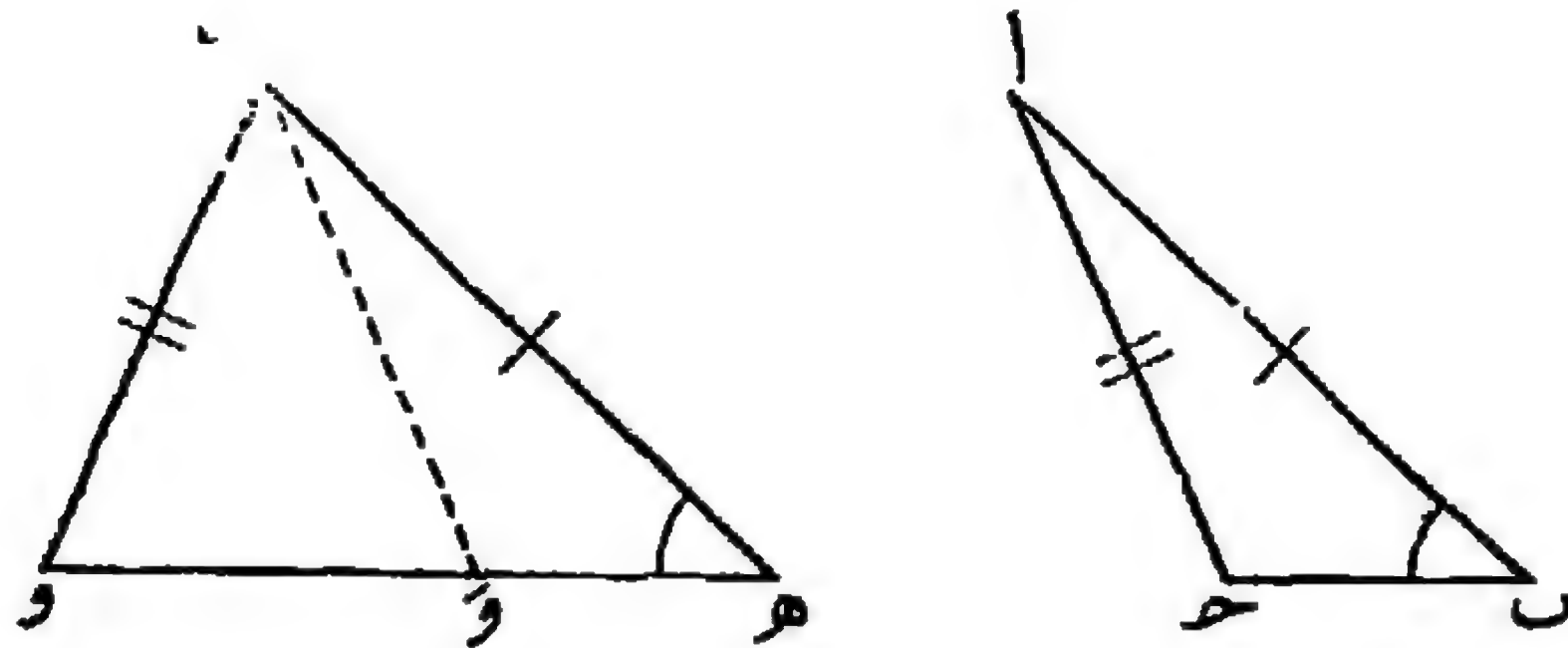
- | | |
|--------------------------------------|------------|
| (أولاً) ضلعان وزاوية المحصورة بينهما | (نظرية ٤) |
| (ثانياً) الأضلاع الثلاثة | (نظرية ٧) |
| (ثالثاً) زاويتان وضلع | (نظرية ١٧) |

ولا يلزم أن ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى من أحدهما مطلق ثلاثة أجزاء نظائرها من الآخر فتتلا



(أولاً) في الشكل كل زاوية في أحد المثلثين تساوى نظيرتها في المثلث الثاني مع أنه لا يترتب على ذلك امكان انطباقهما تمام الانطباق كما هو ظاهر

(ثانياً) اذا ساوى ضلعان وزاوية من أحد المثلثين نظائرها من الثاني وكانت الزاويتان المتساويتان مقابلتين لضلعين متساويين كما في الشكل الآتي فانه لا يلزم من ذلك ان ينطبق المثلثان تمام الانطباق



وذلك لأنه اذا فرضنا ان $ا ب = د ه$ و $ا ح = د و$ و $ب و = د ه$

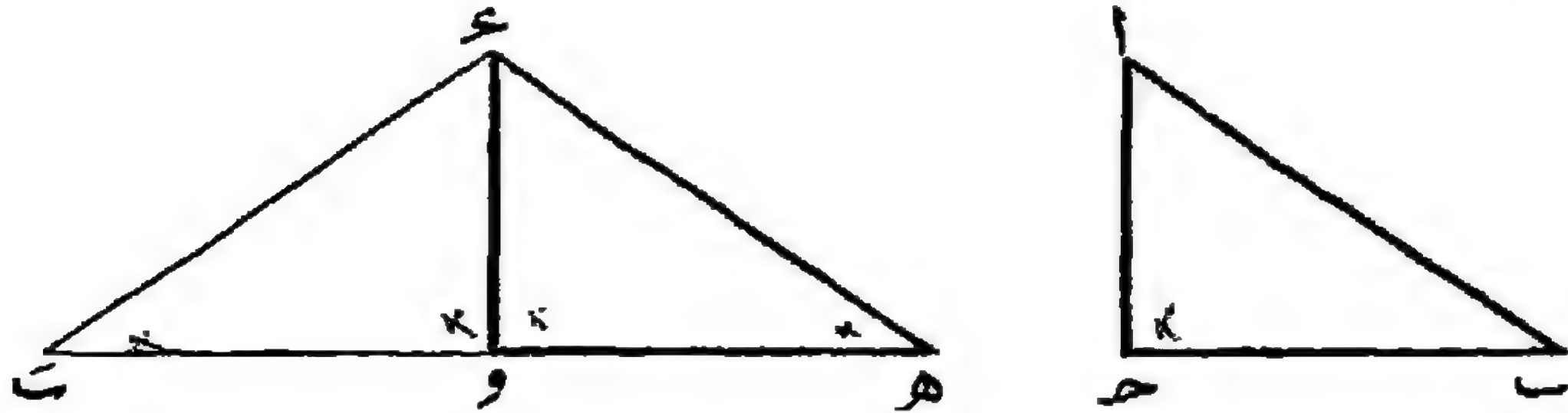
فعند تطبيق $ا ب$ على $د ه$ و بحيث ان $ا ب$ ينطبق على مساويه $د ه$ و $ب و$ على مساويتها $د ه$ نرى ان $ا ح$ إما أن ينطبق على $د و$ وإما أن يأخذ الوضع $د و$

تنبيه — من هذه الفروض يمكن اثبات أن الزاويتين المقابلتين للضلعين المتساويين $ا ب$ و $د ه$ اما أن تكونا متساويتين كالزاويتين $ا ح$ و $ب و$ و $د ه$ فينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق وإما أن تكونا متكاملتين كالزاويتين $ا ح$ و $ب و$ و $د ه$ وتسمى هذه الحالة بالحالة المهمة التي إما ان يتطابق المثلثان فيها أولاً (راجع عملية ٩ صفحة ٨٧)

ولا يأتي الابهام اذا كان كل من الزاويتين المفروض تساويهما قائمة كما يتضح من النظرية الآتية

نظرية ١٨

ينطبق المثلثان القائم الزاوية كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى من أحدهما وتروضع نظيريهما من الثانى



اذا فرضنا أن المثلثين ا ب ج د ه و قائما الزاوية الأول فى ج والثانى فى و

وكان الوتر ا ب = الوتر د ه

والضلع ا ح = الضلع د و

فانه يطلب اثبات ان ا ب ج د ه ينطبق على د ه و تمام الانطباق

البرهان - نضع المثلث ا ب ج بجانب المثلث د ه و بحيث يقع الضلع ا ح على مساوية د و
ويأخذ المثلث ا ب ج الوضع د ب و

فمن حيث ان كلا من الزاويتين د و ه و د ب و قائمة

المستقيم ب و يكون على استقامة ه و

وفى المثلث ه د ب من حيث ان د ه = د ب (لأن كلا = ا ب)

د ب د ه = د د ه ب (نظرية ٥)

وعلى ذلك ففى د و ه و د ب د ه و د ب

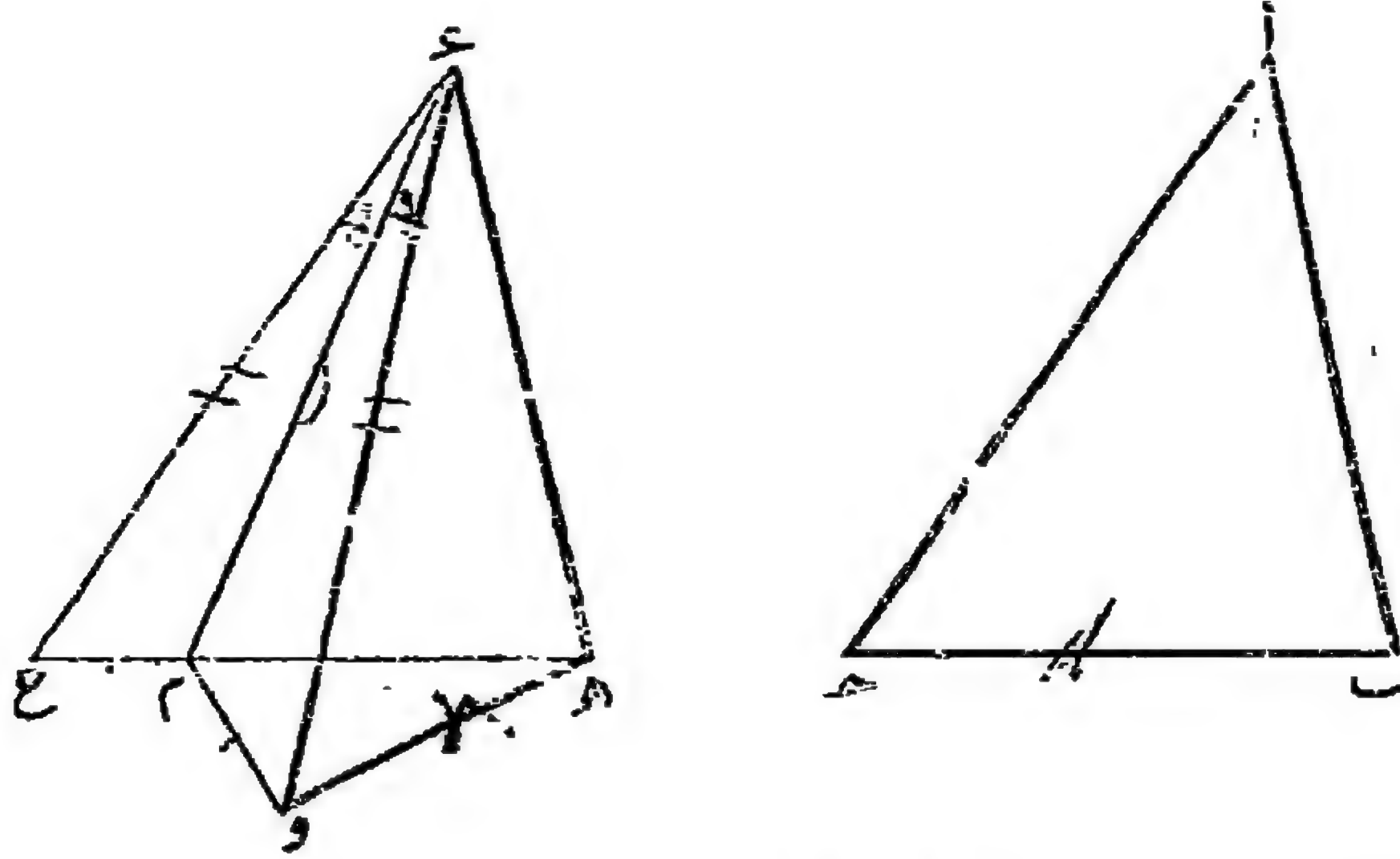
من حيث ان $\left. \begin{array}{l} د د ه = د د ب \\ د د ه = د د ب \\ والضلع د و مشترك \end{array} \right\}$ بالقيام مما تقدم

د و ه ينطبق على د ب تمام الانطباق (نظرية ١٧)

ا ب ج د ه ينطبق تمام الانطباق على د ه و وهو المطلوب أى أن

نظرية ١٩

إذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعي الأول أكبر من نظيرتها المحصورة بين ضلعي الثاني كان الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من نظيره في المثلث الثاني



إذا فرضنا في المثلثين

ان

6

6

فانه يطلب اثبات أن

البرهان ب نطبق ΔABC على ΔDHE و على شرط أن تقع نقطة A على نقطة D ويقع B على مساويه DH

ثم نفرض أن الضلع AC اخذ الوضع DH وأن الضلع BC اخذ الوضع HE فاذا أخذ الضلع AB اتجاه الضلع DE و مر بالنقطة D وكان أكبر من DE و
أي أن $B > A$ أكبر من DE و

وان لم يأخذ DE هذا الاتجاه فانه لا يمر بنقطة D و
وعلى ذلك نفرض أن D منتصف DE وأنه يقابل DE في M

نصل

في

$DE = DH$

م مشترك

$\Delta DME = \Delta DHE$

$DM = DE$

من حيث ان

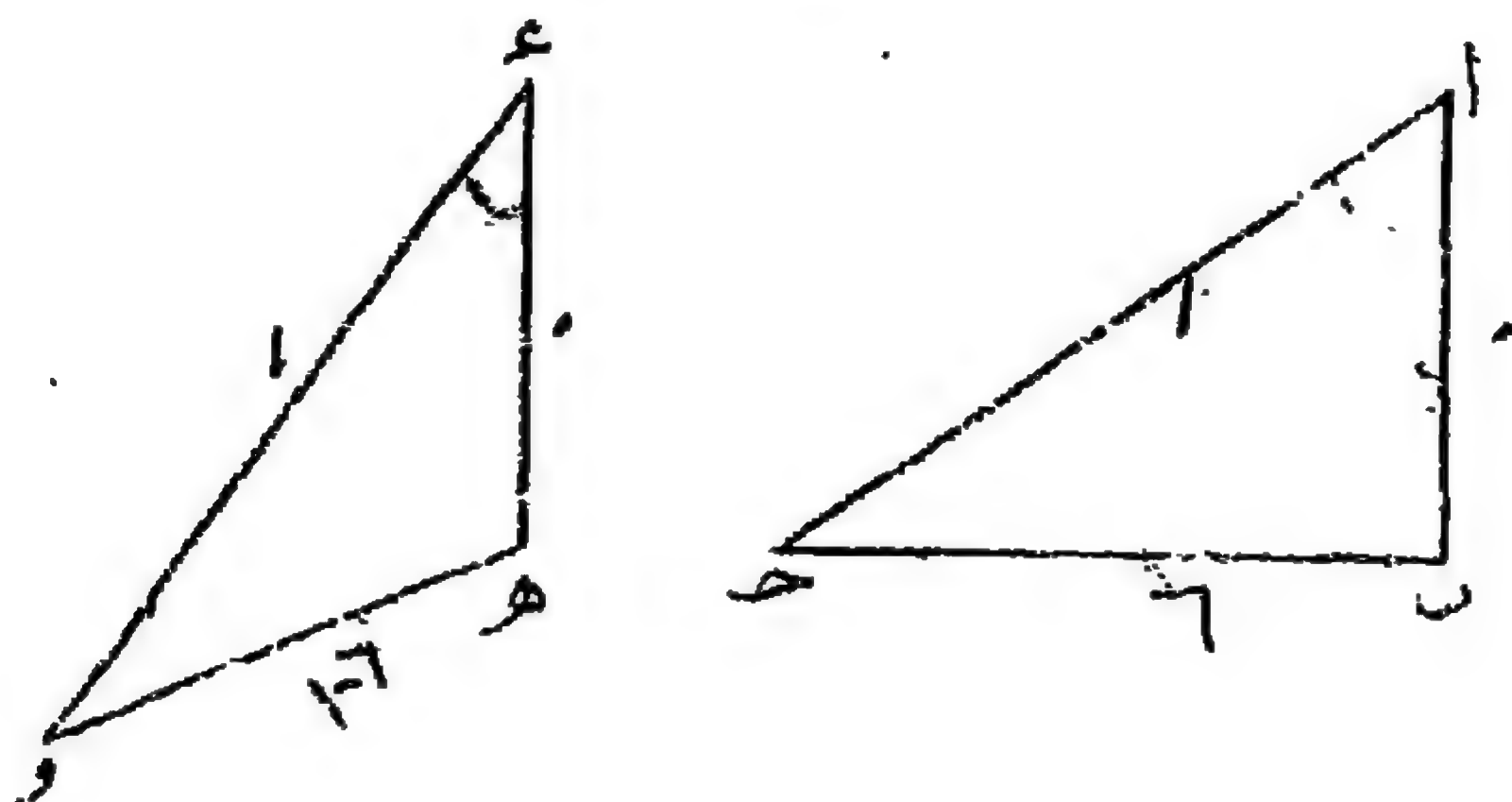
∴

(نظرية ٤)

وفي Δ هـ م و مجموع الضلعين هـ م ٦ م و أكبر من الضلع الثالث هـ و وبعبارة أخرى
هـ م + م ٦ م و أكبر من هـ و

∴ هـ ع الذى هو (ب ح) أكبر من هـ و وهو المطلوب

وبالعكس : اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكان الضلع الثالث فى المثلث الأول أكبر من نظيره فى الثانى كانت الزاوية المحصورة بين الضلعين فى المثلث الأول أكبر من نظيرتها فى الثانى



اذا فرضنا فى المثلثين ا ب ح ٦ د هـ و أن

$$ا ب = د هـ$$

$$٦ ا ح = د هـ$$

$$٦ ب ح أكبر من هـ و$$

فانه يطلب اثبات أن د ب ا ح أكبر من د هـ و

البرهان — ان لم تكن د ب ا ح أكبر من د هـ و

فاما ان تساويها وإما أن تكون أصغر منها

فان كانت د ب ا ح = د هـ و

كان ب ح = هـ و (نظرية ٤)

وهذا خلاف الفرض

وان كانت د ب ا ح أصغر من د هـ و

كان ب ح أصغر من هـ و (نظرية ١٩)

وهذا خلاف الفرض أيضا

أى أن د ب ا ح لا يمكن أن تساوى د هـ و كما أنها لا يمكن أن تكون أصغر منها

فلا بد أن تكون د ب ا ح أكبر من د هـ و وهو المطلوب

مراجعة ماتقدم في المثلثات

١ اذكر خواص المثلث من حيث (أولاً) مجموع زواياه الداخلة (ثانياً) مجموع زواياه الخارجة واذكر خاصة في كثير الأضلاع الذي عدد أضلاعه n توافق التي ذكرتها في (أولاً) وبين مع أى الأشكال يشترك المثلث في الخاصة التي ذكرتها في (ثانياً)

٢ اذكر أنواع المثلثات بالنسبة الى زواياها مع ذكر أى نظرية أو نتيجة يتضمنها ذلك التقسيم
٣ اذكر نظريتين يكون الفرض فيهما متعلقاً بأضلاع المثلث والنتائج الذي يستنبط من هذا الفرض متعلقاً بزواياه

١ ب Δ مثلث فيه $\angle A = 36^\circ$ من السنتيمترات $\angle B = 28^\circ$ من السنتيمترات $\angle C = 6^\circ$ $36 = 28 + 6$ من السنتيمترات والمطلوب بيان زواياه مرتبة حسب مقدار كل منها (قبل قياسها) وإثبات أن هذا المثلث حاد الزوايا

٤ اذكر نظريتين يكون الفرض فيهما متعلقاً بزوايا المثلث والنتائج الذي يستنبط من هذا الفرض متعلقاً بالأضلاع
في المثلث ΔABC

(أولاً) ΔABC $\angle A = 48^\circ$ $\angle B = 6^\circ$ $\angle C = 51^\circ$ ما مقدار الزاوية الثالثة وما هو أكبر الأضلاع
(ثانياً) ΔABC $\angle A = 1^\circ$ $\angle B = 2^\circ$ $\angle C = 97^\circ$ ما مقدار الزاوية الثالثة. اذكر الأضلاع مرتبة على حسب طول كل منها
٥ هل الشروط في كل من الأقسام الستة الآتية كافية لانطباق المثلثين ΔABC و ΔDEF و كل على الآخر تمام الانطباق . بين في أى قسم من الأقسام تكون الحالة المبهمة للمثلثين ثم ارسم المثلث ΔABC بالشروط المذكورة في كل قسم

$\left. \begin{array}{l} \angle A = 3^\circ = \angle D = 3^\circ \text{ سنتيمترات} \\ \angle B = 5^\circ = \angle E = 5^\circ \text{ من السنتيمترات} \\ \angle C = 4^\circ = \angle F = 4^\circ \text{ » } \end{array} \right\} \text{ (رابعا)}$	$\left. \begin{array}{l} \angle A = 71^\circ = \angle D = 71^\circ \\ \angle B = 46^\circ = \angle E = 46^\circ \\ \angle C = 37^\circ = \angle F = 37^\circ \text{ من السنتيمترات} \end{array} \right\} \text{ (أولاً)}$
$\left. \begin{array}{l} \angle A = 53^\circ = \angle D = 53^\circ \\ \angle B = 43^\circ = \angle E = 43^\circ \text{ من السنتيمترات} \\ \angle C = 5^\circ = \angle F = 5^\circ \text{ سنتيمترات} \end{array} \right\} \text{ (خامسا)}$	$\left. \begin{array}{l} \angle A = 81^\circ = \angle D = 81^\circ \\ \angle B = 24^\circ = \angle E = 24^\circ \text{ » } \\ \angle C = 36^\circ = \angle F = 36^\circ \end{array} \right\} \text{ (ثانياً)}$
$\left. \begin{array}{l} \angle A = 90^\circ = \angle D = 90^\circ \\ \angle B = 5^\circ = \angle E = 5^\circ \text{ سنتيمترات} \\ \angle C = 3^\circ = \angle F = 3^\circ \text{ » } \end{array} \right\} \text{ (سادسا)}$	$\left. \begin{array}{l} \angle A = 121^\circ = \angle D = 121^\circ \\ \angle B = 23^\circ = \angle E = 23^\circ \\ \angle C = 36^\circ = \angle F = 36^\circ \end{array} \right\} \text{ (ثالثاً)}$

٦ اذكر عبارة تتضمن خلاصة ماتقدم من النتائج في المسألة السابقة بحيث يتبين منها
(أولاً) وجوب انطباق المثلثين كل على الآخر تمام الانطباق
(ثانياً) جواز انطباقهما

٧ اشرح العبارة الآتية شرحاً وافياً : إذا ساوت ثلاث زوايا من مثلث نظيراتها من مثلث آخر لا يلزم أن ينطبق المثلثان أحدهما على الآخر تمام الانطباق لأن الفروض الثلاثة غير مطلقة

تمارين متنوعة

٨ من نقطة خارجة عن مستقيم معلوم اذا مد اليه عمود وعدة موائل كان

(أولاً) العمود أقصر المستقيمت الممكن مدّها

(ثانياً) المائلان اللذان يصنعان زاويتين متساويتين مع العمود متساويين

(ثالثاً) أصغر المائلين ما كانت زاويته التي يصنعها مع العمود أصغر من زاوية المائل الآخر

٩ اذا ساوى من مثلث ضلعان والزاوية المقابلة لأحدهما نظيراتها من مثلث آخر فالزاوية المقابلة للضلع الآخر من المثلث الأول إما مساوية أو متكاملة لنظيرتها من المثلث الثاني وفي الحالة الأولى ينطبق المثلثان تمام الانطباق

١٠ ا ب عمود على ح د والمطلوب مد عدة موائل من نقطة ا تصنع مع العمود المذكور

الزوايا ١٥, ٣٠, ٤٥, ٦٠, ٧٥ ووضع جدول يبين مقدار كل من أطوال هذه الموائل بواسطة قياسها على فرض أن طول العمود ع سنتيمترات

١١ ا ب ح مثلث طول ضلعه ا ب = ع سنتيمترات والضلع ا ح = ٣ سنتيمترات فاذا كان ا ب ثابت الوضع وتصورنا دوران ا ح حول نقطة ا بحيث يكون طوله دائماً ثابتاً ومساوياً ٣ سنتيمترات فما هي التغيرات في طول ب ح أثناء دوران ا ح كلما زادت د ا من الصفر الى ١٨٠° يكفي في الإجابة أن يقاس ب ح كلما زادت د ا مقدار ٣٠° وتوضع المقاييس المختلفة على هيئة جدول

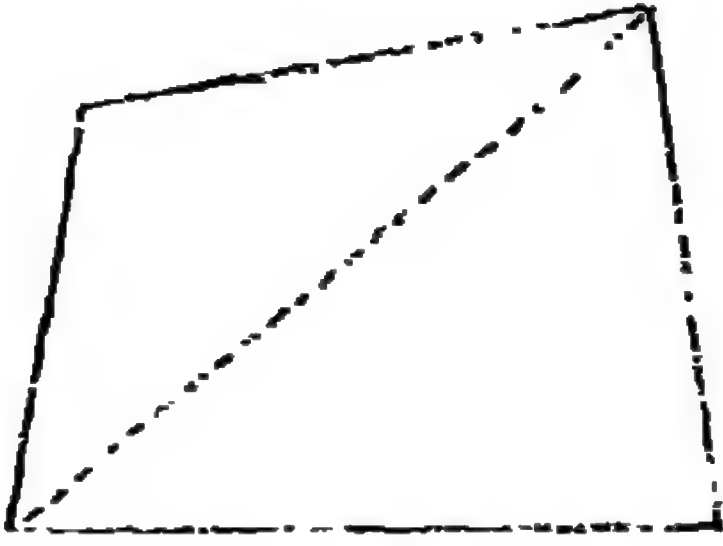
١٢ ا ب سارية رأسية موضعها نقطة ب رسم منها مستقيم أفقي مار بنقطتي ح د المتباعدتين بقدر ١٠ أمتار وكانت د ب ح = ١ د ب = ٦٥° ح د ب = ١ د ب = ٤٠° والمطلوب وضع رسم يبين فيه الشكل المذكور (بمقياس سنتيمتر واحد لكل ٢ من الأمتار) واستخراج طول السارية على وجه التقريب بواسطة قياسه

١٣ ا ب منارة رأسها ا شاهد منه رجل السفينتين ح د راسيتين على خط مستقيم جنوبي المنارة فاذا علم أن ا ب = ٤٠ متراً وأن ا ح د ب = ٥٧ د ا د ب = ٣٣ فانه يطلب وضع رسم بمقياس سنتيمتر لكل ١٠ أمتار يمكن به استخراج البعدين ح د مقرباً الى اقرب متر

١٤ شاهد رجل من منارة السفينتين ا ب متباعدتين بقدر ٦٠٠ متر الأولى ا في الجهة الجنوبية الغربية والثانية ب تبعد عن جهة الجنوب بقدر ١٥ نحو الشرق وفي اللحظة عينها شاهد ا ب في السفينة ا أن السفينة ب واقعة في الجهة الجنوبية الشرقية والمطلوب وضع رسم ذلك (بمقياس سنتيمتر لكل ١٠٠ متر) واستخراج بعد المنارة عن كل سفينة بواسطة قياسه

في الأشكال المتوازية الأضلاع

تعريف



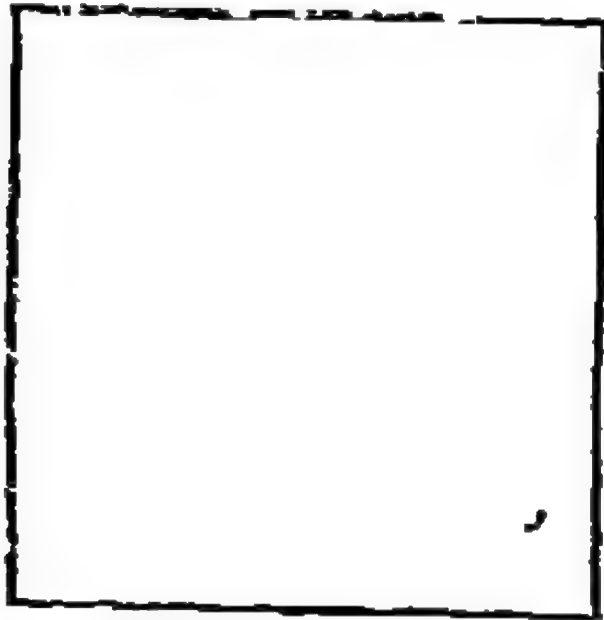
١ الشكل الرباعي شكل مستو محدود بأربعة مستقيمت والمستقيم
الواصل بين رأسى زاويتين متقابلتين منه يسمى قطرا له



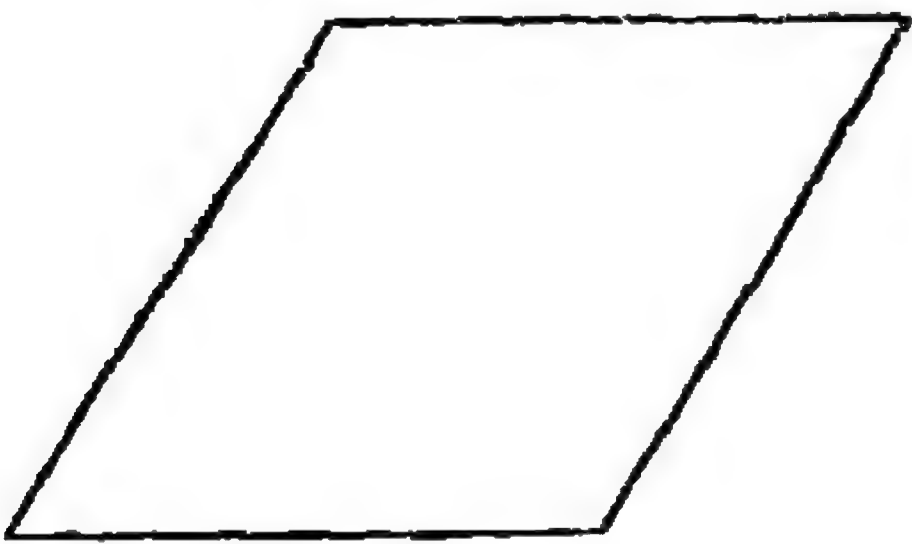
٢ متوازي الأضلاع هو شكل رباعي أضلاعه المتقابلة متوازية
[وسياتى البرهان على أن الاضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع
متساوية وكذلك الزوايا المتقابلة]



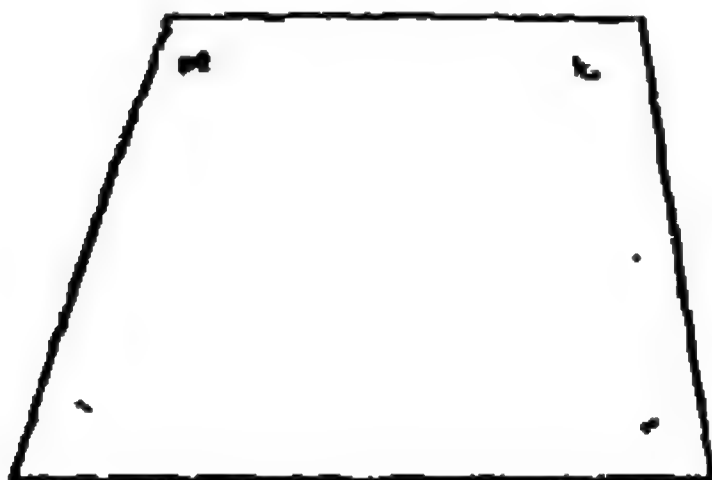
٣ المستطيل هو شكل متوازي الأضلاع احدى زواياه قائمة
[وسياتى البرهان على أن جميع زوايا المستطيل قوائم صفحة ٦٤]



٤ المربع هو مستطيل ضلعاؤه المتجاوران متساويان
[وسياتى البرهان على أن جميع أضلاعه متساوية وزواياه قوائم صفحة ٦٤]



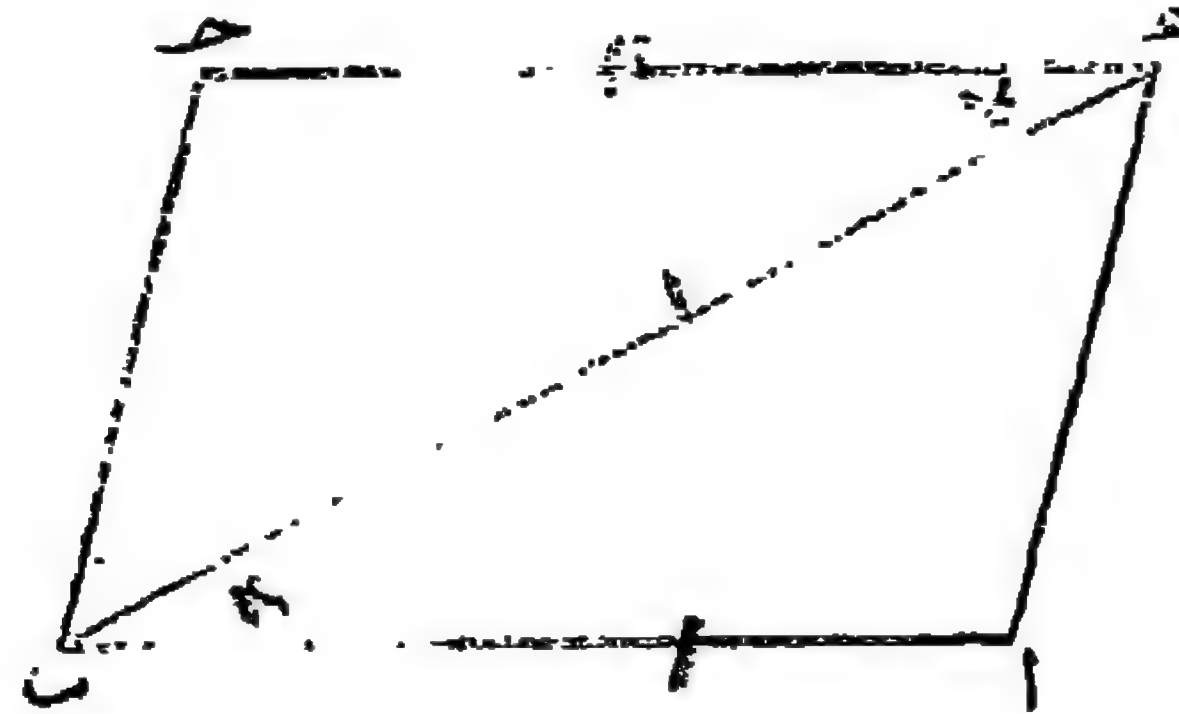
٥ المعين هو شكل رباعي أضلاعه متساوية وزواياه
غير قوائم



٦ شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان وضلعان
غير متوازيين

نظرية ٢٠

إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان في أي شكل رباعي يتساوى ويتوازى الضلعان الآخران



إذا فرضنا أن $AB \parallel CD$ شكل رباعي وأن $AB = CD$ ضائعه المتقابلين متساويان ومتوازيان فإنه يطلب إثبات أن الضلعين الآخرين $AD \parallel BC$ المتقابلين متساويان ومتوازيان كذلك لذلك نصل

البرهان — من حيث أن $AB \parallel CD$ يوازي CD AB قاطع لها \therefore

في المثلثين ABD و ACD

$$AB = CD$$

$\angle B = \angle D$ مشترك

$$\angle A = \angle C$$

مما تقدم

تمام الانطباق

$$\triangle ABD \cong \triangle CDA$$

\therefore ينطبق

$$AD = BC$$

ويكون (أولاً)

$\angle A = \angle C$ ومن حيث أن هاتين الزاويتين متبادلتان

(ثانياً)

$$AD \parallel BC$$

\therefore

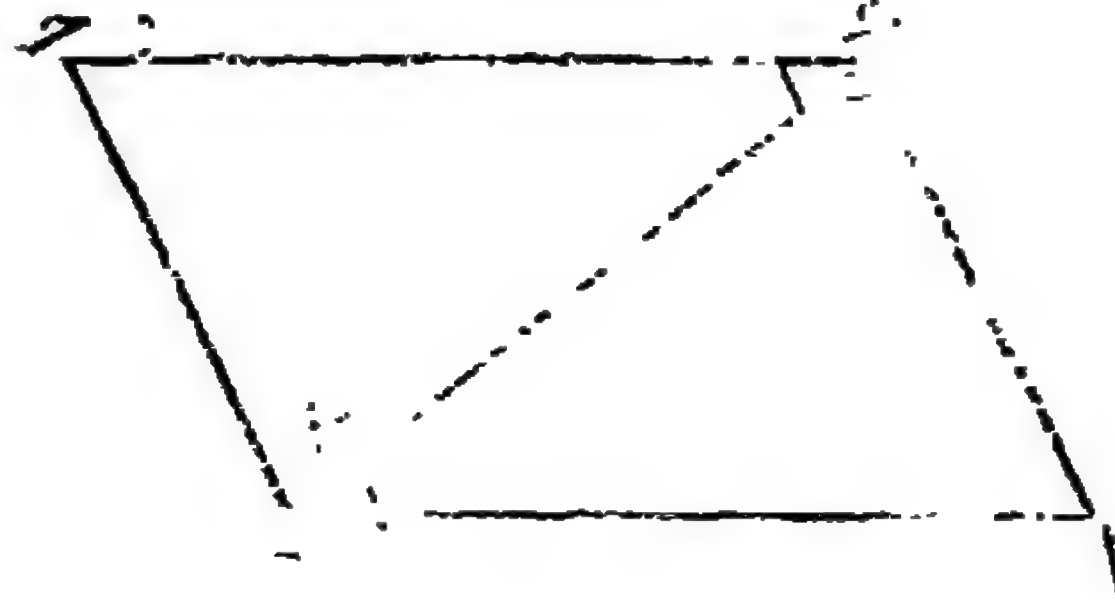
وهو المطلوب

$AD \parallel BC$ متساويان ومتوازيان

أي أن

نظرية ٢١

في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان وكل زاويتين متقابلتين متساويتان والقطر يقسم الشكل الى قسمين متساويين



إذا فرضنا أن $AB \parallel CD$ شكل متوازي الأضلاع قطره AC فإنه يطلب اثبات

(أولاً) أن $AB = CD$ و $AD = BC$

(ثانياً) أن $\angle BAC = \angle DCA$ و $\angle DAC = \angle BCA$

(ثالثاً) أن $\angle B = \angle D$ و $\angle A = \angle C$

(رابعاً) أن $\Delta ABC = \Delta CDA$ في المساحة

البرهان — من حيث أن $AB \parallel CD$ متوازيان و AC قاطع لهما

$\therefore \angle BAC = \angle DCA$ بالتبادل

ومن حيث أن $AD \parallel BC$ متوازيان و AC قاطع لهما

$\therefore \angle DAC = \angle BCA$ بالتبادل

وعلى ذلك ففي المثلثين ABC و CDA

$\angle BAC = \angle DCA$

$\angle DAC = \angle BCA$

والضلع AC مشترك

من حيث أن

والمشترك

$\therefore \Delta ABC = \Delta CDA$ ينطبق على ΔABC تماماً (نظرية ١٧)

اذن $AB = CD$ و $AD = BC$... (أولاً)

$\angle BAC = \angle DCA$ و $\angle DAC = \angle BCA$... (ثانياً)

$\Delta ABC = \Delta CDA$ في المساحة ... (رابعاً)

ومن حيث أن $\angle B = \angle D$ و $\angle A = \angle C$

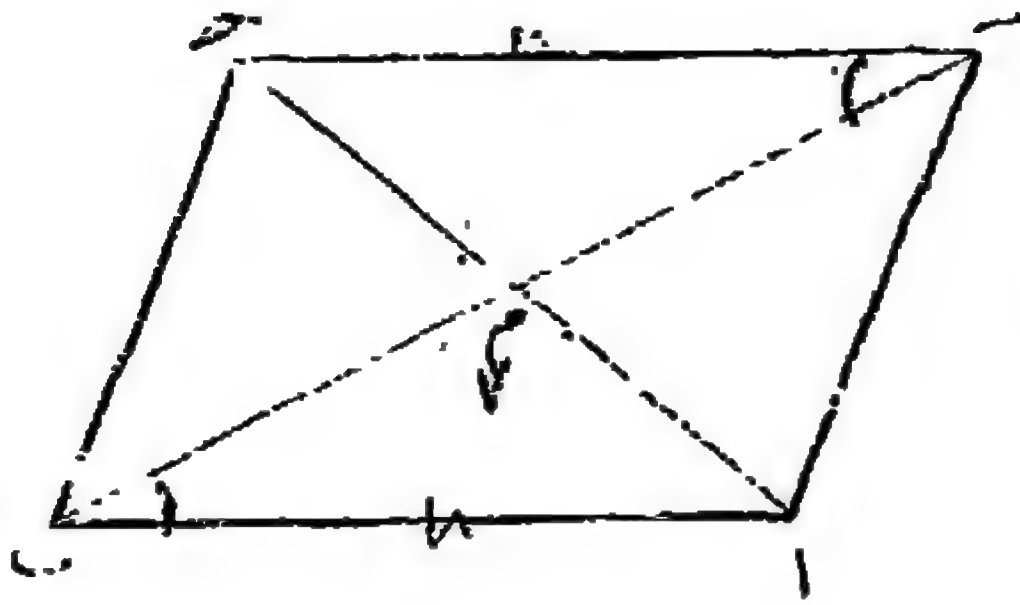
$\angle BAC = \angle DCA$ و $\angle DAC = \angle BCA$

\therefore الزاوية الكلية $\angle B = \angle D$ الزاوية الكلية $\angle A = \angle C$... (ثالثاً)

نتيجة ١ — إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة فكل زاوية أخرى فيه قائمة أيضا وبعبارة أخرى زوايا المستطيل كلها قوائم

لأن مجموع كل زاويتين متجاورتين $= ٢٠٠$ (نظرية ١٤)
 فإذا كانت إحداها قائمة وجب أن تكون الأخرى كذلك
 ومن حيث أن كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متساويتان
 \therefore جميع الزوايا قوائم

نتيجة ٢ — أضلاع المربع متساوية وزواياه قوائم
 نتيجة ٣ — قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر



إذا فرضنا أن القطرين BD و AC يتقاطعان في M
 فانه يطلب إثبات أن $BM = MD$ و $AM = MC$
 البرهان — في $\triangle BMD$ و $\triangle DMA$

بالتبادل
 بالتقابل بالراس

$$\left. \begin{array}{l} \angle BMD = \angle DMA \\ \angle MBD = \angle MDA \\ \text{والضلع } BD = \text{الضلع } DA \end{array} \right\} \text{من حيث أن}$$

$\therefore BM = MD$ و $AM = MC$ (نظرية ١٧)

تمارين

- ١ يكون الشكل الرباعي متوازي الأضلاع
 (أولا) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متساويان
 (ثانيا) إذا كان كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان
 (ثالثا) إذا نصف قطراه كل الآخر
- ٢ قطرا المعين ينصف كل منهما الآخر ويكونان متعامدين
- ٣ إذا تساوى قطرا متوازي الأضلاع كانت زواياه قوائم
- ٤ قطرا متوازي الأضلاع غير متساويين مالم يكن مستطيلا أو مربعا

تمارين على الخطوط المتوازية والأشكال المتوازية الأضلاع

المثائل والتطبيق

- ١ برهن على أنه إذا طويينا المعين عند أحد قطريه ينطبق المثلثان اللذان على جانبي هذا القطر كل على الآخر تمام الانطباق أى أن قطر المعين يقسمه الى مثلثين متماثلين في الوضع
- ٢ برهن على أن كلا من قطري المربع محور للتماثل وأوجد مستقيمين آخرين يقسم كل منهما المربع الى قسمين متماثلين
- ٣ كل من قطري المستطيل يقسمه الى مثلثين متطابقين فهل يكون على هذا قطر المستطيل محورا للتماثل فيه وما هما المستقيمان اللذان يقسم كل منهما المستطيل الى جزأين متماثلين
- ٤ بين ما إذا كان لمتوازي الأضلاع محور تماثل واذكر السبب
- ٥ $ABCD$ شكل رباعي فيه $AB = CD$ و $AD = BC$ والمطلوب معرفة أى القطرين يصح أن يكون محورا للتماثل مع العلم بأن الأضلاع ليست جميعها متساوية
- ٦ المطلوب اثبات ما يأتى بطريقة التطبيق
(أولا) يتطابق متوازي الأضلاع إذا ساوت زاوية وضلعان متجاوران من أحدهما نظائرها من الثانى
(ثانيا) يتطابق المستطيلان إذا ساوى ضلعان متجاوران من أحدهما نظيريهما من الثانى
- ٧ ينطبق الشكلان الرباعيان كل على الآخر تمام الانطباق إذا ساوت الأضلاع الأربعة ومطلق زاوية من أحدهما نظائرها من الثانى

(مسائل نظرية متنوعة)

- ٨ منتصف قطر متوازي الأضلاع ينصف أى مستقيم يمر به وينتهى بضلعين متقابلين
- ٩ العمودان النازلان من رأسين متقابلين في متوازي الأضلاع على القطر الواصل بين الرأسين الآخرين متساويان
- ١٠ إذا كانت النقطة S منتصف الضلع AB في متوازي الأضلاع $ABCD$ والنقطة V منتصف الضلع المقابل CD كان الشكل $ASDV$ متوازي الأضلاع
- ١١ $ABCD$ E و F مثلثان فيهما AB يساوى DE و BC يساوى EF والمطلوب اثبات أن AC يساوى DF و AD يساوى CF
- ١٢ $ABCD$ شكل رباعي فيه AB يوازي CD و AD يساوى BC ولكنه لا يوازيه والمطلوب إثبات

(أولاً) ان $\angle د + \angle د = 180^\circ = \angle د + \angle د$

(ثانياً) ان القطر $\angle د = \angle د$ القطر $\angle د$

(ثالثاً) ان المستقيم الواصل من منتصف $\angle د$ الى منتصف $\angle د$ يقسم الشكل الى جزأين متماثلين

١٣ $\angle د + \angle د$ قضبان متساويان يدوران بسرعة واحدة الأول حول $\angle د$ والثاني حول $\angle د$

في الاتجاه الذي يدور فيه عقرب الساعة فاذا ابتدأ في دورانهما من وضعين متوازيين في اتجاهين متضادين فانه يطلب اثبات

(أولاً) ان هذين القضيبين يكونان دائماً متوازيين أثناء دورانهما

(ثانياً) ان المستقيم الواصل بين الطرفين $\angle د$ يمر دائماً بنقطة معلومة ثابتة

(مسائل عديدة وتخطيطية متنوعة)

١٤ $\angle د + \angle د$ مثلث والمطلوب معرفة مقدار كل من زواياه مع العلم بأن $\angle د$ الداخلة $\angle د = \frac{2}{3}$

الخارجة وأن ثلاثة أمثال $\angle د =$ أربعة أمثال $\angle د$

١٥ سفينة سائرة نحو الجهة الشرقية اضطرت الى السير حول جزيرة فغيرت اتجاهها (أولاً) بقدر 93°

ثم 78° ثم 119° ثم 64° والمطلوب معرفة مقدار التغير الذي يجب أن تحدثه السفينة في اتجاهها حتى تسير في اتجاهها الأول أي نحو الجهة الشرقية

١٦ اذا كانت مجموع الزوايا الداخلة لأي شكل كثير الأضلاع يساوي مجموع زواياه الخارجة فانه

يطلب عدد أضلاعه مع اقامة البرهان على صحة الجواب

١٧ المطلوب رسم الشكل الخماسي $\angle د + \angle د$ بحيث تكون فيه $\angle د = 110^\circ$ $\angle د = 6^\circ$ $\angle د = 115^\circ$

$\angle د = 6^\circ$ $\angle د = 93^\circ$ $\angle د = 152^\circ$ وذلك باستعمال المنقلة

ثم تحقيق ما اذا كان الضلع $\angle د$ يوازي $\angle د$ بواسطة المسطرة والبرجل واثبات ذلك نظرياً

١٨ $\angle د$ نقطتان ثابتتان . مددنا من $\angle د$ مستقيماً غير محدود مثل $\angle د$ ما إذا بالنقطة $\angle د$ ومن $\angle د$

مستقيماً آخر مثل $\angle د$ غير محدود كذلك ما إذا بنقطة $\angle د$ فاذا تصورنا أن المستقيمين $\angle د$ $\angle د$ ابتدأ

أن يدورا في آن واحد الأول حول نقطة $\angle د$ في اتجاه عقرب الساعة على شرط أن يدور في الثانية الواحدة

في زاوية مقدارها $7\frac{1}{4}^\circ$ والثاني حول $\angle د$ في اتجاه مخالف لسير عقرب الساعة على شرط أن يدور في الثانية

الواحدة في زاوية مقدارها $3\frac{3}{4}^\circ$ فانه يراد

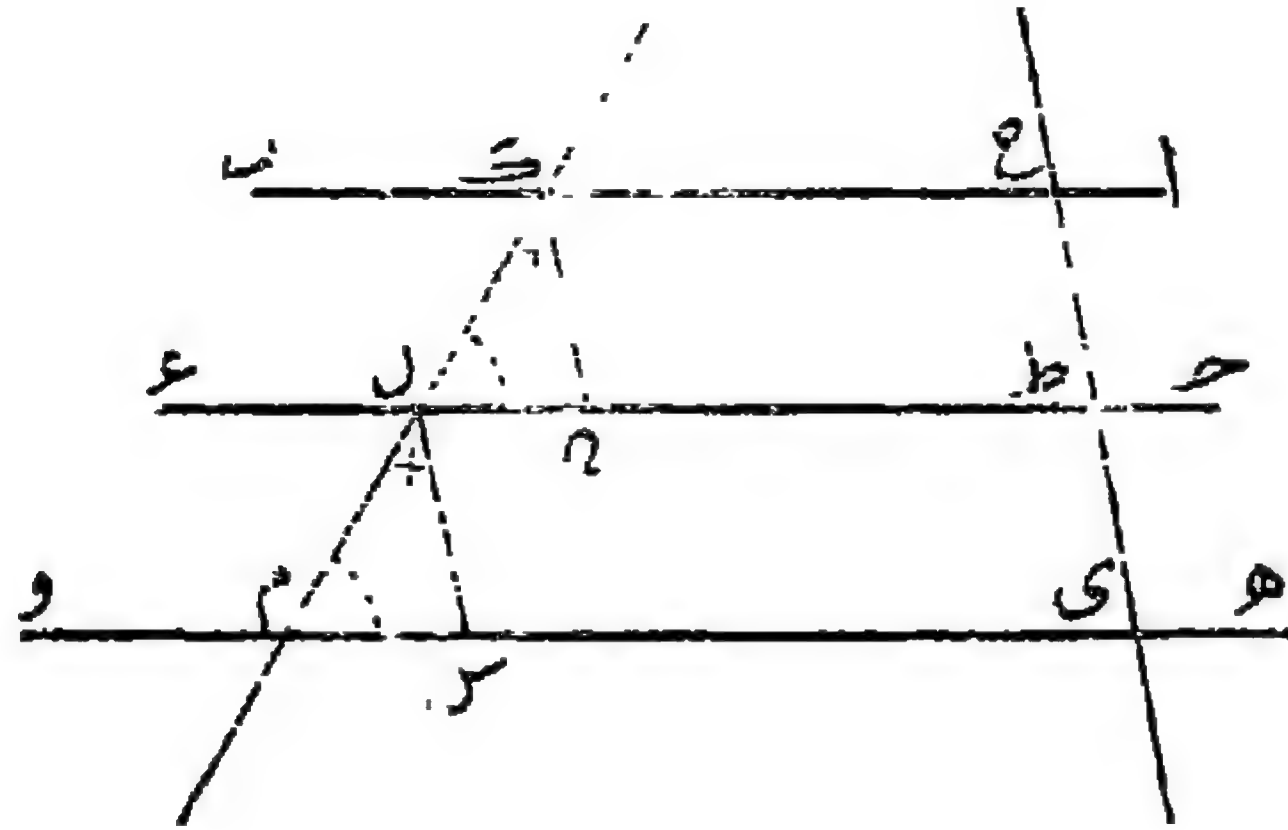
(أولاً) معرفة الزمن الذي يمضي حتى يكون $\angle د$ $\angle د$ متوازيين

(ثانياً) إيجاد مقدار الزاوية بين $\angle د$ $\angle د$ بالرسم والحساب بعد ١٢ ثانية من ابتداء الدوران

(ثالثاً) مقدار ما تنقصه هذه الزاوية بعد ذلك في الثانية الواحدة

نظرية ٢٢

إذا قطع مستقيم عدة مستقيمت متوازية وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المتوازيات متساوية فالأجزاء المحصورة بينها لأي قاطع آخر متساوية كذلك



إذا فرضنا أن $ا ب$ $ح د$ $هـ و$ مستقيمت متوازية وأن $ع ط$ $ي قاطع$ لها وفيه الجزء $ع ط =$ الجزء $ط ي$ وأن $ك ل م$ قاطع آخر فانه يطلب اثبات أن الجزء $ك ل =$ الجزء $ل م$

لذلك نرسم من $ك$ المستقيم $ك د$ موازيا $ع ي$ ومن $ل$ المستقيم $ل س$ موازيا $ع ي$ أيضا البرهان — من حيث أن $ح د$ $هـ و$ متوازيان $ك م$ قاطع لهما

بالتناظر $د ك ل د = د ل م س$

ومن حيث أن $ك د$ يوازي $ل س$ لأن كلا يوازي $ع ي$ $ك م$ قاطع لهما

بالتناظر $د ك ل د = د س ل م$

لكن كلا من الشكلين $ع د$ $ك ط س$ متوازي الأضلاع

$ك د =$ الضلع المقابل له $ع ط$ $ك ل س =$ الضلع المقابل له $ط ي$

ومن حيث أن $ع ط = ط ي$ بالفرض

$ك د = ل س$

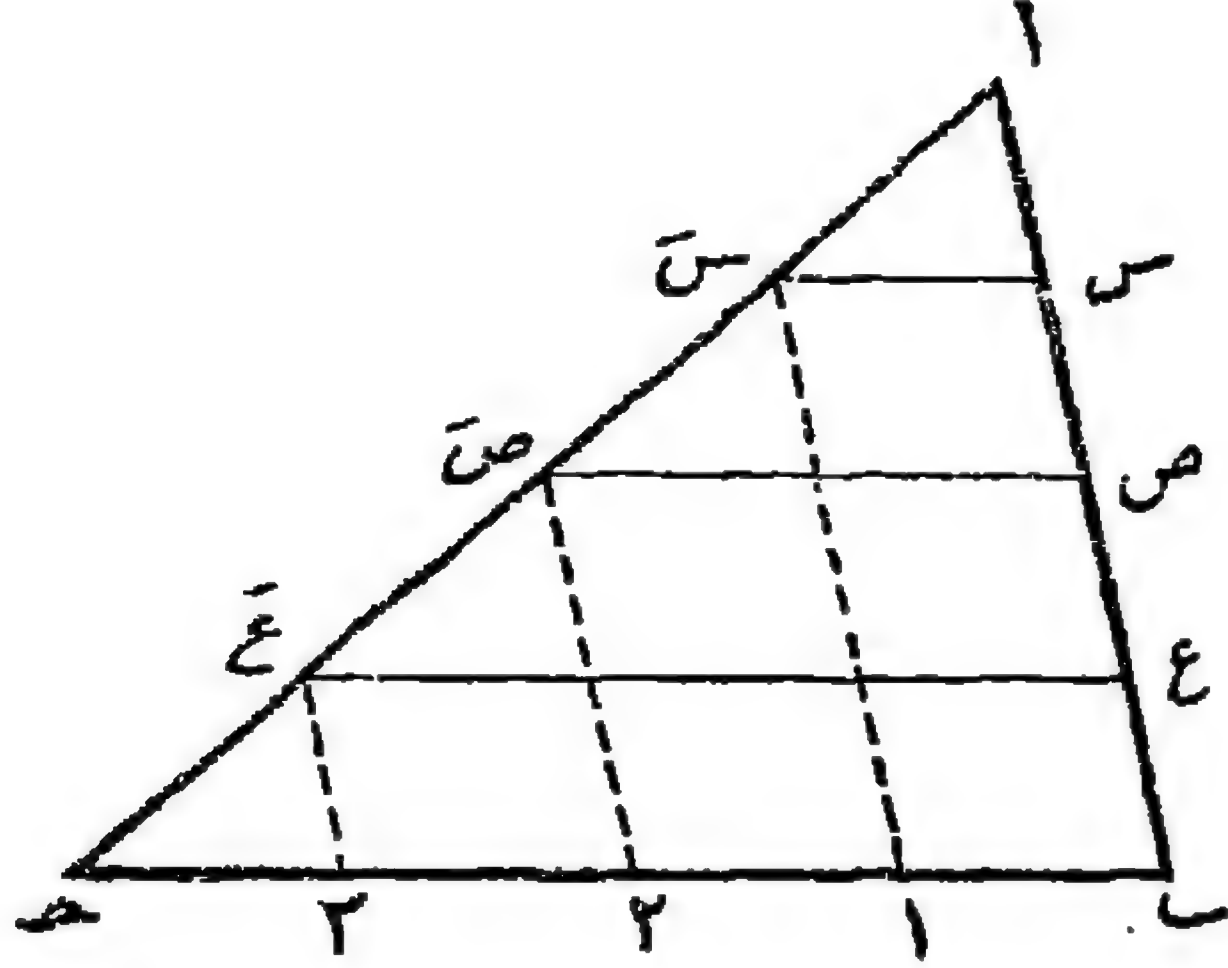
وعلى ذلك ففي المثلثين $ك ل د$ $ك ل م س$

من حيث أن $\left. \begin{array}{l} د ك ل د = د ل م س \\ د ك ل د = د ل م س \\ ك د = ل س \end{array} \right\}$

\therefore ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق (نظرية ١٧)

\therefore $ك ل = ل م$ وهو المطلوب

نتيجة — اذا قسمنا أحد أضلاع المثلث $ا ب ح$ وليكن $ا ب$ الى أقسام متساوية بالنقط $س ك ص ع$ ثم ممدنا من هذه النقط المستقيمت $س س ص ك ع$ موازية للقاعدة $ب ح$ فان هذه المتوازيات تقسم الضلع الثانى $ا ح$ الى أقسام متساوية



وبذا يمكن تعيين طول كل من هذه المتوازيات بالنسبة الى طول القاعدة $ب ح$ وذلك لأتنا اذا رسمنا من $س ك ص ع$ المستقيمت $س س ك ص ع$ موازية $ا ب$ فان هذه المستقيمت على حسب نظرية ٢٢ تقسم $ب ح$ الى أربعة أقسام متساوية ويكون $س س$ مساويا لأحد هذه الأقسام $ك ك ص ص$ اثنين منها $ك ك ع ع$ يساوى ثلاثة وبعبارة أخرى يكون

$$س س = \frac{1}{4} ب ح \quad ك ك = \frac{2}{4} ب ح \quad ص ص = \frac{3}{4} ب ح$$

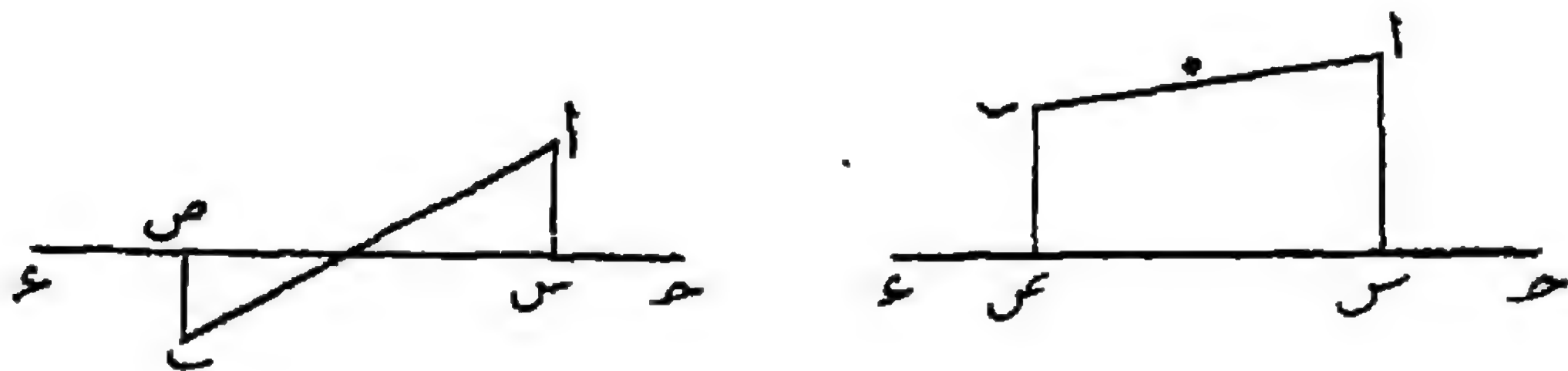
ويقال على وجه الاجمال اذا اتقسم أحد أضلاع المثلث الى $د$ من الأقسام المتساوية ومد منها موازيات لقاعدته تقابل الضلع الثانى فان

$$س س = \frac{1}{د} ب ح \quad ك ك = \frac{2}{د} ب ح \quad ص ص = \frac{3}{د} ب ح \quad \text{وهكذا}$$

تنبيه — ينبغى أن تدرس الآن عملية ٧ صفحة ٨٣

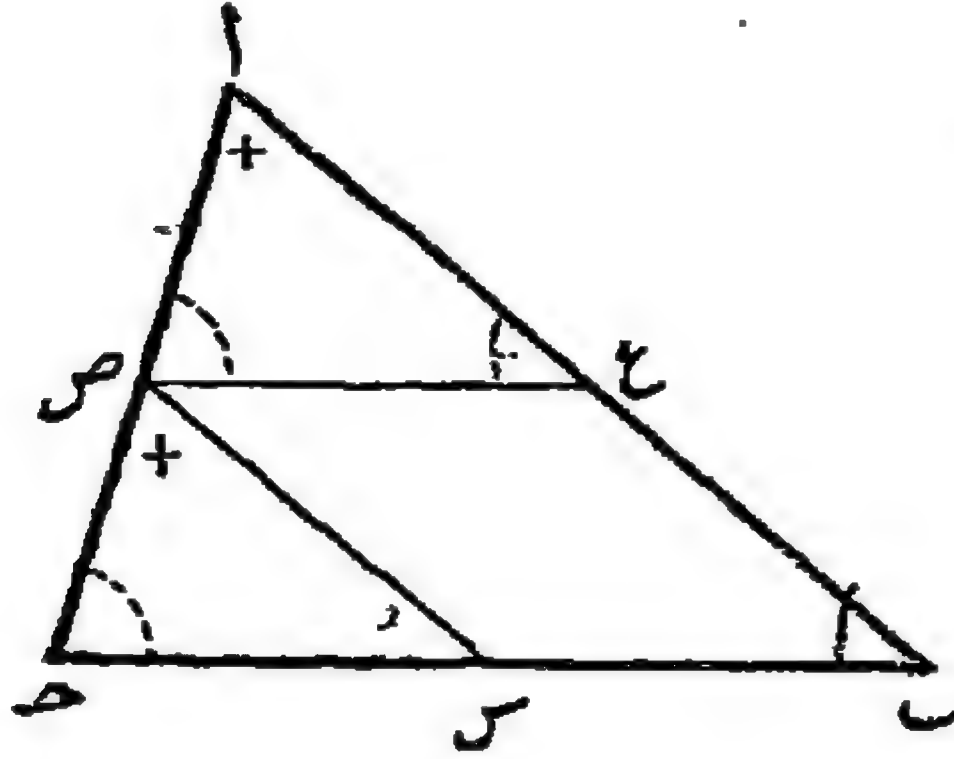
(تعريف)

اذا أنزلنا من نهايتى مستقيم معلوم مثل $ا ب$ عمودين مثل $ا س ك ب$ على مستقيم آخر مثل $د ع$ غير محدود فانه يقال للمستقيم $س ك$ المحصور بين موقعى العمودين المذكورين انه مسقط $ا ب$ على $د ع$



تمارين على المستقيمتين المتوازيتين والأشكال المتوازية الأضلاع

إذا رسمنا من منتصف أحد أضلاع مثلث مستقيما يوازي قاعدته فإنه يمر بمنتصف الضلع الثاني وهذه حالة خاصة للنظرية ٢٢



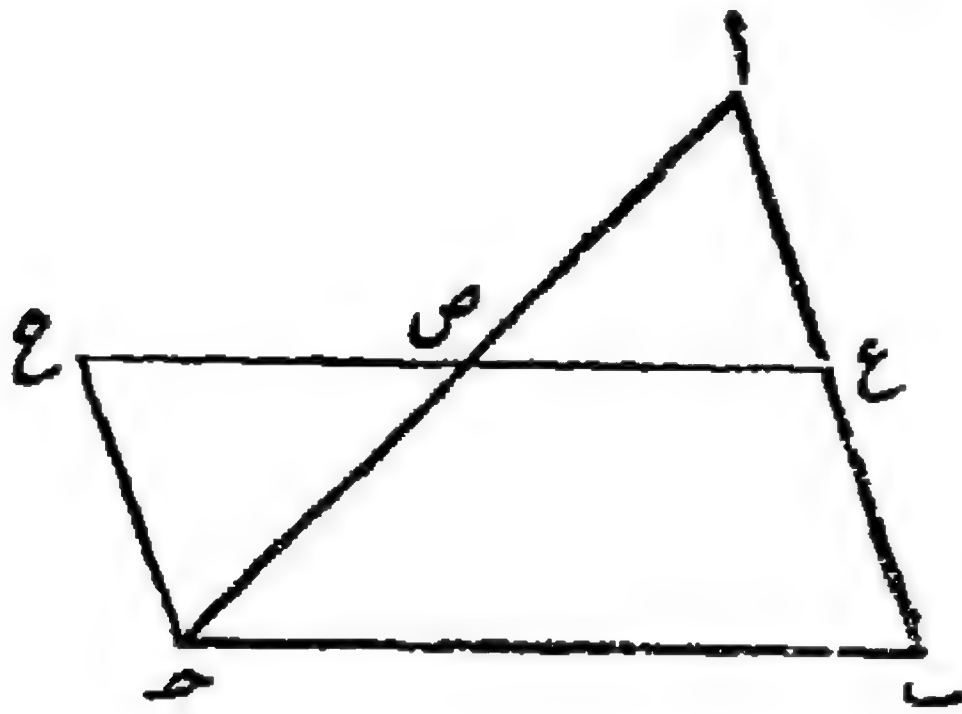
[ا ب ح مثلث ونقطة ع منتصف ا ب ح منتصف ا ب ح يوازي ب ح]

ويطلب اثبات أن ا ص = ص ح

لذلك نرسم ص ح يوازي ا ب وثبت أن ا ع ا ص ينطبق على ا ح ص ح تمام الانطباق]

٢٢ المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين في المثلث يوازي الضلع الثالث

[ا ب ح مثلث والنقطة ع منتصف ا ب ح منتصف ا ح]



ويطلب اثبات أن ا ع ص يوازي ب ح

لذلك نمدد ع ح على استقامته الى د وتأخذ البعد

ص ح = ع ح ونصل د ح ثم نبرهن على أن ا ح ا ع ص

ينطبق على ا ح ص تمام الانطباق

ومن ذلك يتضح الباقي من البرهان]

٣ المستقيم الواصل من منتصف ضلع مثلث الى منتصف الآخر يساوي نصف القاعدة

٤ المطلوب اثبات ان المستقيمتين الثلاثة الواصلة بين منتصفات أضلاع مثلث تقسمه الى أربعة مثلثات متساوية من عامة الوجوه

٥ المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين في مثلث ينصف أى مستقيم ممدود من رأس المثلث الى قاعدته

٦ ا ب ح د متوازي الأضلاع ونقطة س منتصف الضلع ا د ونقطة ص منتصف الضلع المقابل ب ح برهن على أن س ح ا يقسمان القطر د ب الى ثلاثة أقسام متساوية

٧ المستقيمتين الواصلة بين منتصفات الأضلاع المتجاورة لشكل رباعي تكون شكلا متوازي الأضلاع

٨ اذا نصفت أضلاع الشكل الرباعي ووصل بين منتصفى كل ضلعين متقابلين بمستقيم كان كل من المستقيمين الواصلين منصفين الآخر

٩. AB مستقيم ونقطة M منتصفه K KS VS مستقيم آخر أنزلنا عليه من النقطة A KA MA AB الأعمدة AC MA MD K B H وكانت $BH = 2$ 4 من السنتيمترات $KA = 1$ 8 من السنتيمترات والمطلوب إيجاد طول MD وتحقيق ذلك بالقياس ثم البرهنة على أن

$MD = \frac{1}{4} (B + H + 1)$ أو $\frac{1}{4} (B + H + 1)^*$ على حسب كون النقطتين A B في جهة واحدة من المستقيم VS أو في جهتين مختلفتين منه

١٠. إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمتين متوازيتين وكان جزءا كل قاطع المحصوران بين هذه المتوازيات متساويين كان طول ثاني هذه المتوازيات المحصور بين القاطعين وسطا حسابيا بين المتوازيين الآخرين المحصورين بين القاطعين المذكورين

١١. شبه منحرف طول إحدى قاعدتيه المتوازيتين AB من السنتيمترات والأخرى B من السنتيمترات والمطلوب إثبات أن المستقيم الواصل بين منتصفى الضلعين غير المتوازيين مواز للقاعدتين المتوازيتين وطوله يساوى $\frac{1}{2} (B + 1)$ من السنتيمترات

١٢. إذا فرضت نقطة مثل A ومد منها المستقيمان AS AV وقسم أحدهما AS إلى خمسة أقسام متساوية ومد من نقط التقسيم مستقيمتين متوازيتين تقابل المستقيم الآخر AV فانه يراد قياس كل من هذه المتوازيات الخمسة وأخذ متوسط أطوالها ومقارنته بطول الموازي الثالث ثم البرهنة بطريقة هندسية على أن هذا الموازي الثالث هو متوسط المتوازيات الخمسة

اذكر منطق نظرية لهذه الحالة تشمل أى عدد فردى من هذه المتوازيات وليكن $(2 + 1)$

١٣. إذا أنزلت أعمدة من رؤوس متوازي الأضلاع على مستقيم خارج عنه فانه يطلب البرهنة على أن مجموع العمودين النازلين من رأسين متقابلين يساوى مجموع العمودين الآخرين (لذلك نصل القطرين ومن نقطة تقاطعهما نزل عمودا على المستقيم المعلوم)

١٤. مجموع العمودين النازلين على ساقى مثلث متساوى الساقين من أى نقطة مفروضة على قاعدته يساوى العمود النازل من أحد طرفى القاعدة على الساق المقابل له (ينتج من ذلك أن مجموع العمودين النازلين على ساقى المثلث المتساوى الساقين من أى نقطة على قاعدته ثابت أى لا يتغير مقداره مهما تغير وضع النقطة على القاعدة) ماهو التغير الذى يحصل فى هذه الحالة إذا فرضت النقطة على امتداد القاعدة

١٥. إذا فرضت نقطة داخل مثلث متساوى الأضلاع وأنزل منها أعمدة على كل من أضلاعه فان مجموع هذه الأعمدة يساوى العمود النازل من أحد رؤوس المثلث على الضلع المقابل له وعلى ذلك فمجموع هذه الأعمدة ثابت

١٦. إذا كانت المستقيمتان المتوازيتان متساويتان كانت مساقطهما على مستقيم ما متساويتان

مقياس الرسم القطري

لما كانت مقاييس الرسم القطرية من أهم المسائل التطبيقية على نظرية ٢٢ رأينا أن نبين فائدتها وكيفية انشائها وأن تقتصر في ذلك على شرح المقياس القطري العشري إذ فيه الكفاية فنقول

إذا فرضت قطعة أرض وأريد عمل رسم لها وكان مقياسه صغيرا كان الخط الدال على ماطوله متر في الأرض المذكورة صغيرا لدرجة يصعب معها قياسه بالضبط لكنا نرى مما سيحيى أنه يمكن بواسطة المقياس القطري قياس مثل هذه الأطوال الصغيرة الى درجة عظيمة من الضبط والاحكام

فلو كان مقياس رسم الأرض المذكورة هو $\frac{1}{25000}$ كان

ماطوله متر مدلولا عليه في الرسم بخط طوله ٠,٠٠٠٤ من المتر

وماطوله ١٠٠ متر مدلولا عليه في الرسم بخط طوله ٠,٠٤ من المتر أى ٤ سنتيمترات

ط	ع	و	م	ن	س
			٩		
			٨		
			٧	✓	
			٦		
			٥		
			٤		
			٣		
			٢		
			١		
س	ع	و	م	ن	ط

فاذا رسمنا مستقيما ما مثل ا س وركزنا في نقطة ا وأخذنا عليه الأبعاد المتتالية المتساوية ا ب ٦ ب ٦ ح د الخ على شرط أن كلا منها يساوى ٤ سنتيمترات ثم قسمنا الجزء ب ا الى عشر أقسام متساوية في النقط ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩ الخ

حدث أن كلا من الأجزاء ا ب ٦ ب ٦ ح د الخ دال على ماطوله ١٠٠ متر

وأن كلا من الأجزاء العشرة التي انقسم اليها ب ا دال على ماطوله ١٠ امتار

واذا أقمتنا من ا ب ٦ ب ٦ ح د أعمدة على ا س مثل ا ه ب و ٦ ح د ط الخ وأخذنا على ا ه عشرة أبعاد متساوية ومددنا من نهاياتها مستقيمت موازى ا س حصلنا على عشرة مستقيمت متوازية

نفرض أنها تقطع العمود ب و في النقط ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩ الخ

ثم نقسم و ه أحد أجزاء الموازى العاشر الى عشرة أقسام متساوية

فإذا تصورنا وصل نقط تقسيم و ه بما يناظرها من نقط تقسيم ب ا نرى أن المستطيل و ب ا ه
انقسم الى عشرة مستطيلات جزئية متساوية نصل أقطارها كما هو مبين في الشكل فيحدث المقياس
القطري العشري المراد انشاؤه

ثم انه في المثلث ب و م من حيث ان أجزاء المتوازيات المحصورة بين ب و ك ب م توازي و م
ومن حيث ان و م يدل على طول ١٠ أمتار
فبناء على ماتقدم في نتيجة نظرية ٢٢ نجد أن

$$\text{في المثلث ب و م جزء الموازي المرقوم ١} = \frac{١}{١٠} \times \text{و م} = ١ \text{ (مترا)}$$

$$٦ \text{ » » » } ٢ = \frac{٢}{١٠} \times \text{و م} = ٢ \text{ (مترين)}$$

$$٦ \text{ » » » } ٣ = \frac{٣}{١٠} \times \text{و م} = ٣ \text{ (أمتار) وهكذا}$$

وعلى ذلك اذا أريد إيجاد الخط الدال على ماطوله ٦ أمتار مثلا من هذا المقياس كان جزء الموازي
المرقوم ٦ ل المحصور بين العمود ب و و بين القطر ب م هو الخط المطلوب
واذا أريد إيجاد الخط الدال على ماطوله ٢٣٧ مترا نجري العمل هكذا

نركز البرجل في نقطة تقاطع الموازي ٧ بالعمود د ط ولتكن نقطة ي ثم نفتح البرجل حتى نصل الى
نقطة تقاطع هذا الموازي بالقطر ٣ د ولتكن نقطة ر فيكون ر هو الخط المطلوب لأن

$$\text{ر ي} = \text{د ط} + \text{ط ر} = ٧ + ٢٠٠$$

$$= ٧ + ٢٠٠ + ٣٠$$

$$= ٢٣٧ \text{ مترا}$$

وبالعكس اذا كان المراد معرفة مايدل عليه طول خط معين في رسم قطعة الأرض المتقدم ذكرها
فلذلك نفتح البرجل بقدر طول هذا الخط المعين ونطبق الفتحة على أحد المتوازيات العشرة على شرط
أن يكون احد طرفي البرجل في نقطة تقاطع الموازي بأحد الأعمدة والطرف الآخر في نقطة تقاطع هذا
الموازي بأحد الأقطار

فمثلا ان كان الخط المعلوم دالا على طول بين ١٠٠ متر و ٢٠٠ متر نفتح البرجل فتحة بقدر طول
الخط ونضع أحد طرفي البرجل على العمود ح ع ونحرك البرجل عليه حتى يقع طرفه في نقطة تقاطع
العمود مع أحد المتوازيات ويقع طرف البرجل الثاني في نقطة تقاطع هذا الموازي بأحد الأقطار.

فاذا فرضنا أن الموازي هو السادس مثلا وأن القطر هو ه ع حدث أن طول الخط المعلوم دال على

$$١٠٠ + ٥٠ + ٦ = ١٥٦ \text{ مترا}$$

تمارين على المقاييس الطولية

- ١ خريطة مقياس رسمها ٤ سنتيمترات لكل ١٠٠ متر ويراد رسم مستقيمين أحدهما يدل على ماطوله ٣٣٦ مترا والآخر يدل على ماطوله ٤٠٨ من الأمتار
- ٢ خريطة مقياس رسمها ٤ سنتيمترات لكل ١٠٠ متر ويراد رسم مستقيم يدل على ماطوله ٤١٧ مترا
- ٣ المطلوب انشاء مقياس رسم قطري دال على الأمتار على شرط أن يكون طول كل سنتيمترين فيه دالا على ١٠٠ متر
- ٤ المطلوب رسم مستقيم يكون دالا على ٢٥ مترا في خريطة مقياس رسمها سنتيمتران لكل ١٠٠ متر

الهندسة العملية

العمليات

يلزم لحل العمليات الآتية المسطرة والبرجل فقط اذ لا يستدعى العمل أثناء السير في الحل قياس الخطوط أو الزوايا وعلى ذلك لالزوم لاستعمال المساطر المدرجة أو المنقلات في رسم أشكال هذه العمليات وليس الغرض من هذه العمليات دراستها على انها نظريات فقط بل يجب في جميع الأحوال أن يعمل الرسم بحيث يراعى في عمله قواعد الاحكام والضبط

وقد رأينا أن نردف كل مسألة عملية ببرهانها النظري ولكن هذا لا يمنع من تحقيق نتيجة العمل وصحة الرسم بالقياس

وتدل الخطوط المنقوطة في أشكال هذه العمليات على أنها جاءت لقصد البرهان تمييزا لها من الخطوط اللازمة في جوهر العملية

وينبغي أن يكون لدى الطالب الأدوات الآتية ليتمكن من اجراء العمل وحل الدعاوى

١ مسطرة مستقيمة الحافة مقسمة من أحد جانبيها الى السنتيمترات والمليمترات ومن الجانب الآخر الى البوصات وأعشارها

٢ مثلثان من الخشب قائما الزاوية أحدهما متساوي الساقين والآخر زاويتا قاعدته ٦٠° و ٣٠°

٣ برجل

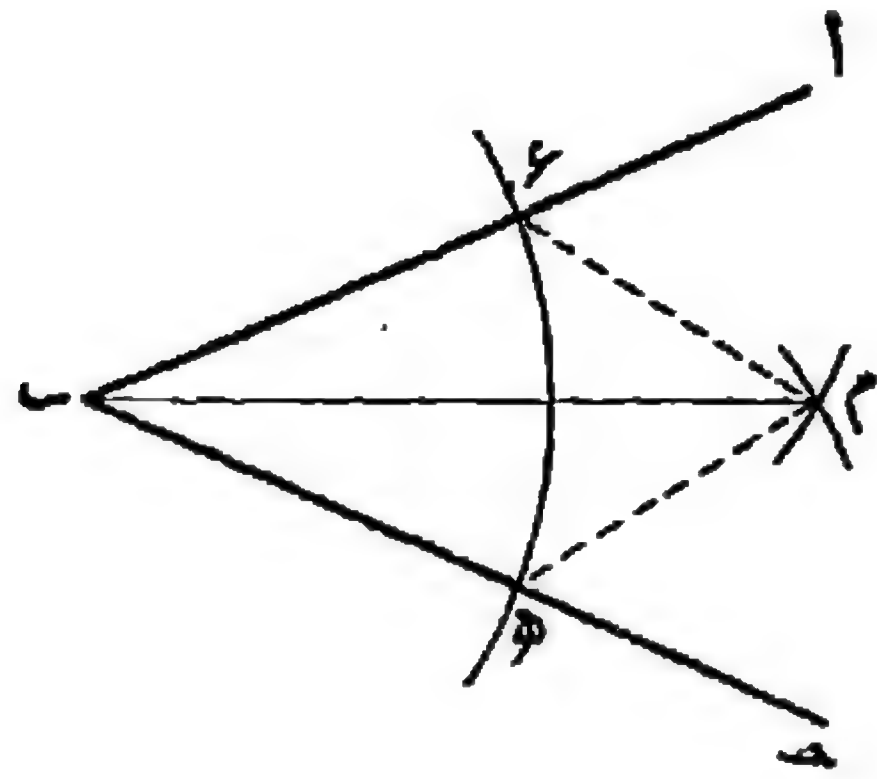
٤ آلة نقل البعد

٥ منقلة مستديرة (نصف دائرة)

عمليات على المستقيمت والزوايا

عملية ١

المطلوب تنصيف زاوية معلومة

نفرض أن $\angle A$ الزاوية المعلومة

العمل - نركز البرجل في B وبنصف قطر مناسب نرسم قوسا يقطع BA في D و BC في H
 ثم نركز في كل من D و H وبنصف قطر يساوي BD نرسم قوسين يتقاطعان في M ونصل B و M
 فيكون BM هو منصف الزاوية $\angle A$

البرهان - نصل
 ففي المثلثين

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

$$BD = BH$$

\therefore ينطبق $\triangle BDM$ على $\triangle BHM$ تمام الانطباق (نظرية ٧)

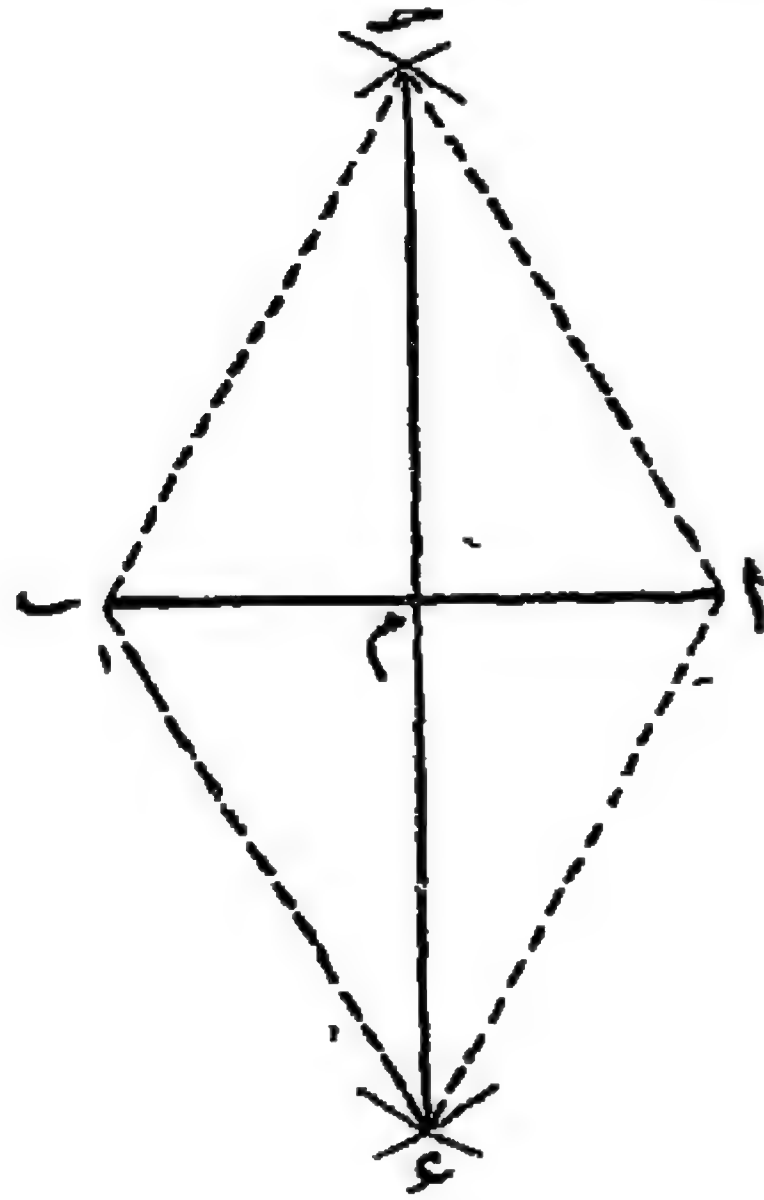
أي أن $\angle DBM = \angle HBM$

$\therefore BM$ هو منصف $\angle A$

تنبيه - يشاهد أننا ركزنا في D و H ورسمنا قوسين بنصف قطر يساوي البعد BD وأن تقاطع هذين القوسين عين النقطة M مع أنه لا يلزم أن يكون نصف قطر هذين القوسين مساويا للبعد BD فانه يمكن أن يساوي أي بعد كان على شرط أن يكون كافيا لتقاطع القوسين

عملية ٢

المطلوب تصنيف مستقيم محدود

نفرض أن $أ ب$ هو المستقيم

العمل - نرکز في $أ$ ونبعد يساوي $أ ب$ نرسم قوسا فوق $أ ب$ وأخر تحته ثم نرکز في $ب$ ونبعد يساوي $أ ب$ نرسم قوسين يقطعان الأولين في $ح$ و $د$ ونصل $ح د$ فيقطع $أ ب$ في نقطة $م$ فتكون $م$ منتصف $أ ب$

البرهان - نصل $أ ح$ و $أ د$ و $ب ح$ و $ب د$ ففي المثلثين $أ ح د$ و $ب ح د$

من حيث أن $\left. \begin{array}{l} أ ح = ب ح \\ أ د = ب د \\ ح د مشترك \end{array} \right\}$ (لكونهما نصفى قطرين متساويين)
(« « « «)

\therefore $أ م = ب م$ (نظرية ٧)

وكذلك في المثلثين $أ م د$ و $ب م د$

$\left. \begin{array}{l} أ م = ب م \\ أ د = ب د \\ م د مشترك \end{array} \right\}$ من حيث أن

\therefore $أ م = ب م$ (نظرية ٤)

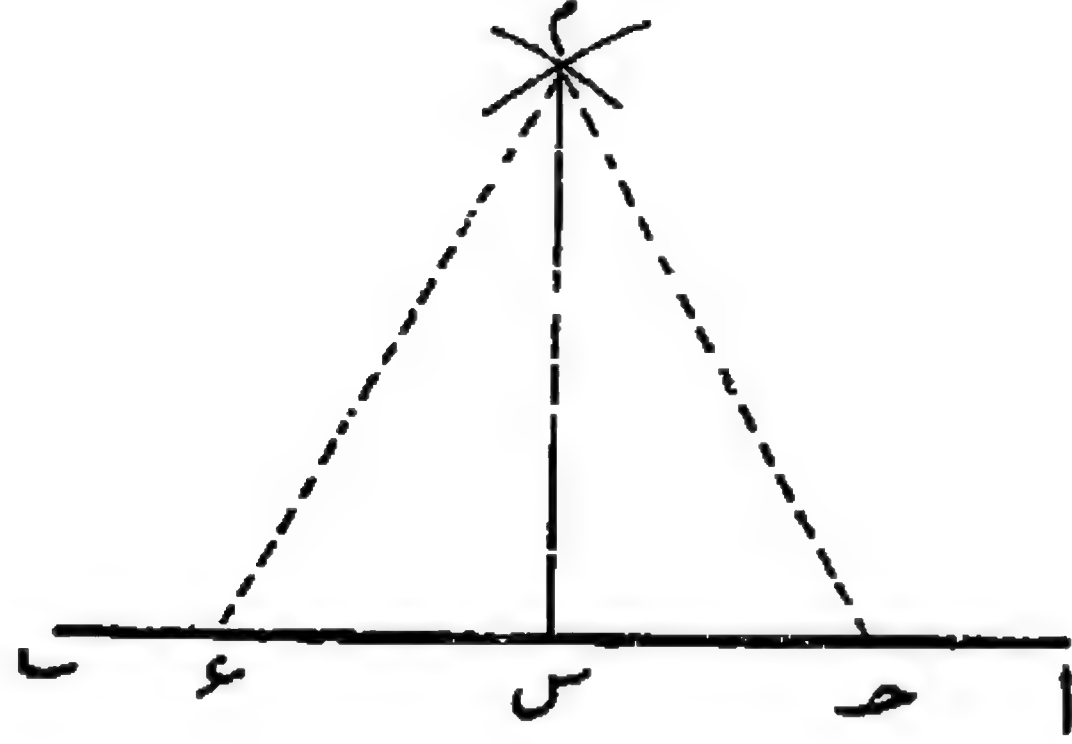
أي أن $م$ منتصف $أ ب$

تنبيه ١ - ليس من الضروري أن يكون نصف القطر الذي ركنا له في $أ$ و $ب$ ورسمنا القوسين فوق المستقيم وتحت مساويا البعد $أ ب$ بل يمكن أن يكون مساويا لأى بعد كان على شرط أن يكون كافيا لأن يتقاطع كل قوسين لاحداث التقطعتين $ح د$ اللتين بواسطتهما يتعين المستقيم $ح د$

٢ - يؤخذ من تطابق المثلثين $أ م د$ و $ب م د$ أن الزاويتين $أ م د$ و $ب م د$ متساويتان ولكونهما متجاورتين كل منهما قائمة فيكون $ح م$ عمودا على $أ ب$ ما را بمنتصفه

عملية ٣

المطلوب إقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه



نفرض ان AB هو المستقيم المعلوم C س النقطة المفروضة عليه
العمل - نركز في S وننصف قطر مناسب نعين النقطتين G و D على AB بحيث
يكون $SG = SD$

ثم نركز في كل من G و D وننصف قطريساوي D نرسم قوسين يتقاطعان في M

ثم نصل M س فيكون عمودا على AB

البرهان - نصل M و G و M و D

ففي المثلثين MSG و MSD

من حيث ان $SG = SD$ $MG = MD$ MS مشترك
فان $MSG = MSD$ لانهما نصفان قطريين في دائرتين متساويتين

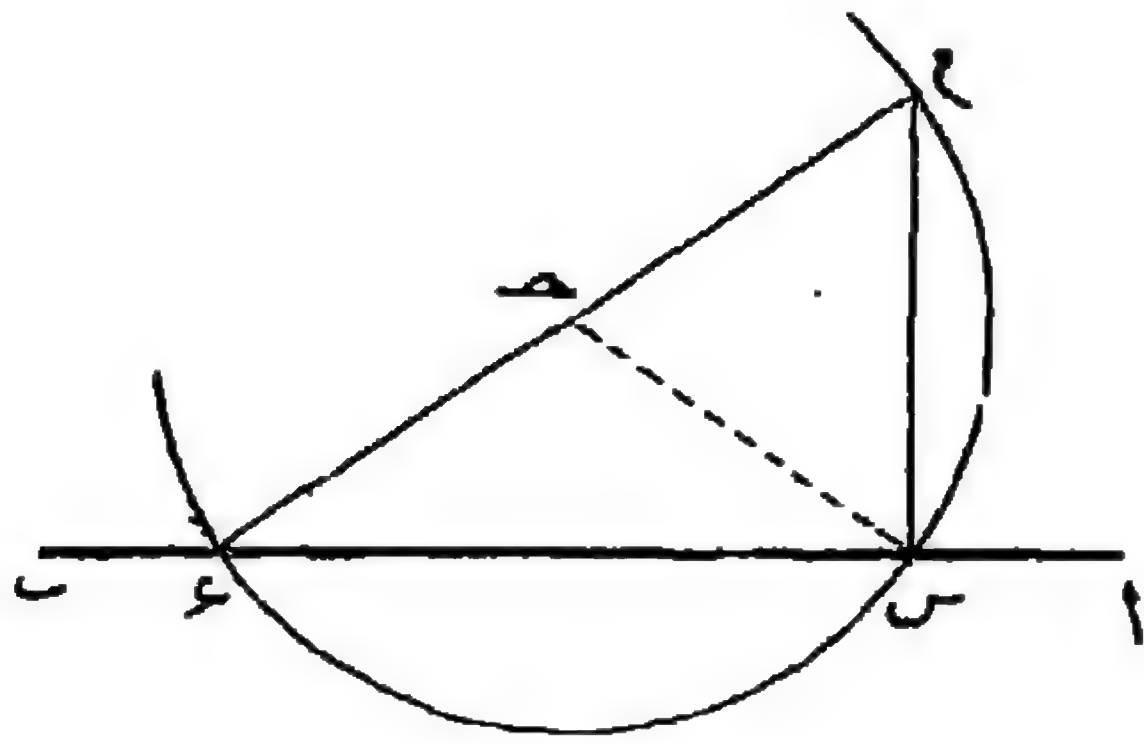
(نظرية ٧) $\therefore \angle MSG = \angle MSD$

ولكونهما متجاورتين كل منهما قائمة

أي أن MS عمود على AB

ملاحظة - اذا كانت نقطة S قريبة من أحد طرفي المستقيم المعلوم يتبع في طريقة حل المسألة
حينئذ إحدى الطريقتين الآتيتين

الطريقة الأولى



العمل — نقرض نقطة مثل ح خارج المستقيم ا ب
ونركز فيها وبنصف قطريساوى ح س نرسم محيط دائرة
يقطع ا ب في د

ثم نصل د ح ونمده على استقامته حتى يلاقى المحيط في م
ثم نصل س م فيكون هو العمود المطلوب

البرهان — نصل د ح س

فمن حيث ان $\angle د ح س = \angle م ح س$

$\therefore \angle د ح س = \angle م ح س$

ومن حيث ان $\angle د ح س = \angle م ح س$

$\therefore \angle د ح س = \angle م ح س$

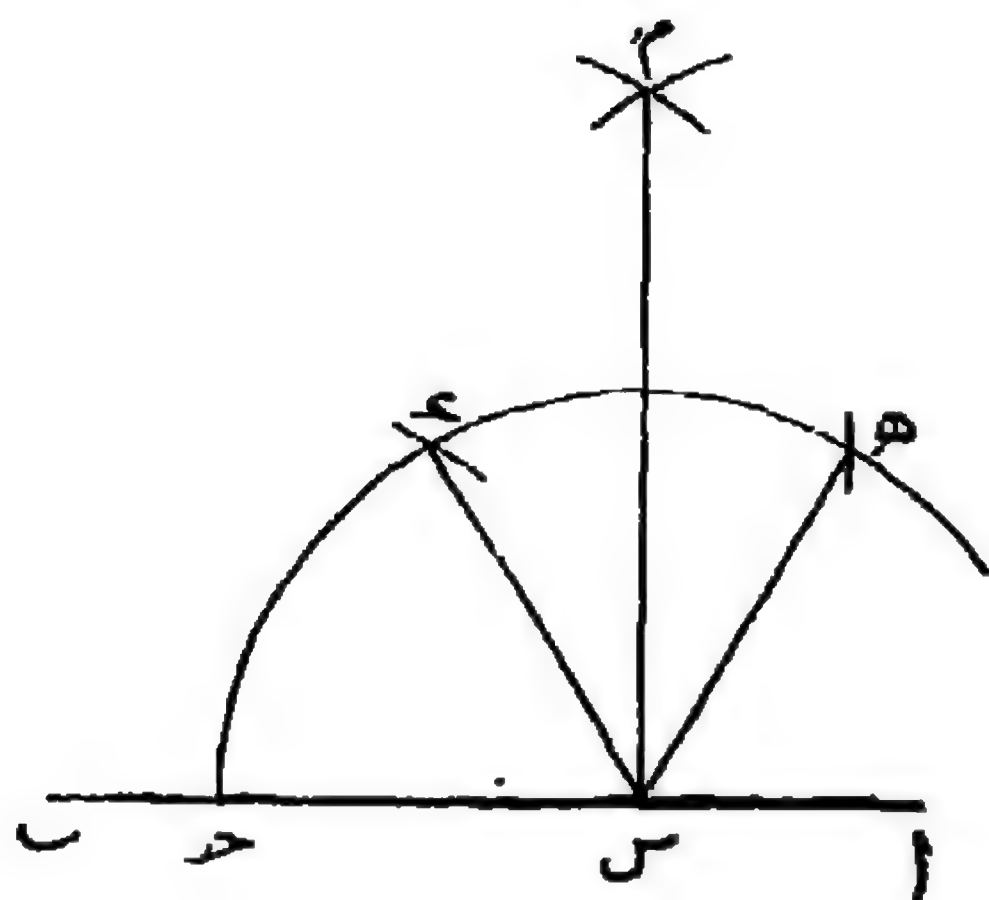
\therefore الزاوية الكلية $\angle د ح س + \angle م ح س = 180^\circ$

$= 180^\circ$

$= 90^\circ$

س م عمود على ا ب

الطريقة الثانية



العمل — نركز في س وبنصف قطر مناسب نرسم قوسا
يقطع ا ب في ح

نركز فيها وبالبعد عينه نرسم قوسا يقطع الأول في د

نركز فيها وبالبعد عينه نرسم قوسا آخر يقطع القوس الأول في هـ

ثم نصل د س هـ س

وننصف د س هـ بالمستقيم س م (عملية ١)

فيكون س م هو العمود المطلوب

البرهان — يمكن إثبات أن كلا من الزاويتين د س هـ و هـ س د تساوى 90°

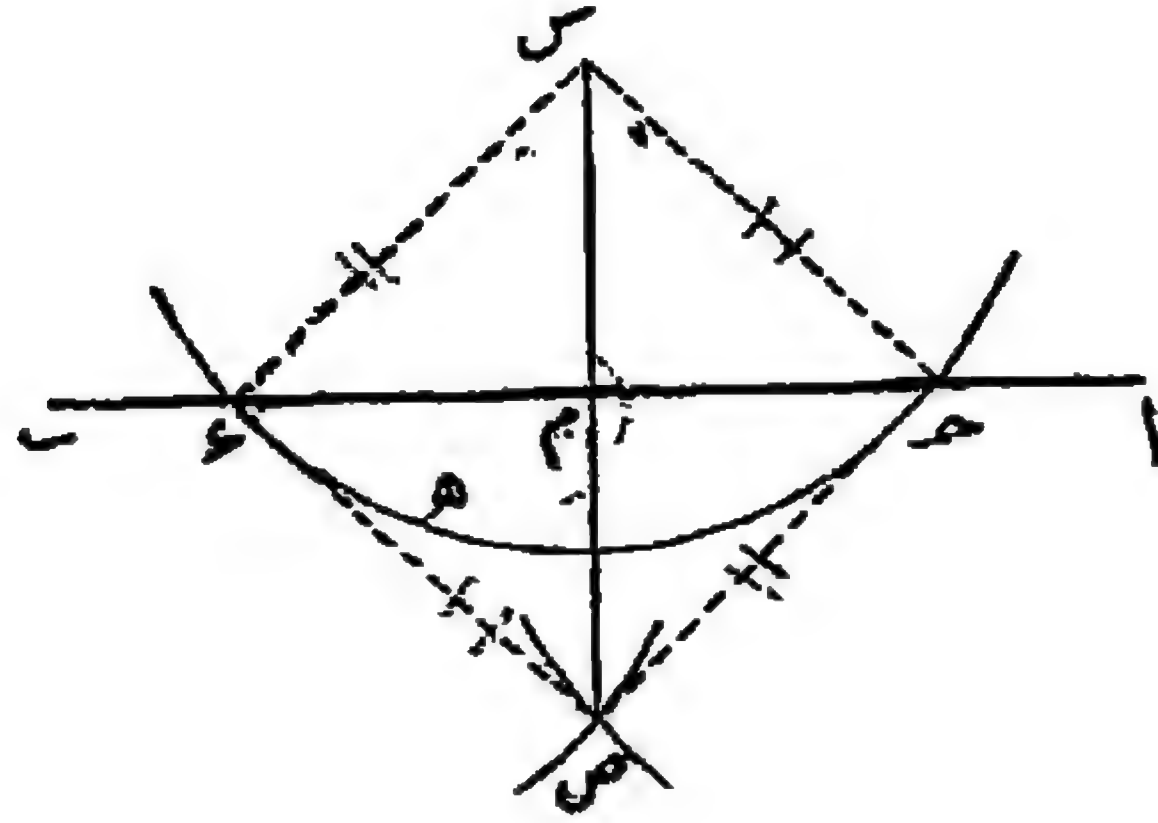
ومن حيث ان $\angle د س هـ = \angle هـ س د$

$\therefore \angle د س هـ = \angle هـ س د$

أي أن س م عمود على ا ب

عملية ٤

المطلوب انزال عمود على مستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه



نفرض أن س النقطة المطلوب انزال العمود منها على ا ب
العمل — نرکز في س وبنصف قطر مناسب نرسم قوسا يقطع ا ب في النقطتين ح و د
نرکز في كل منهما وبنصف قطريساوي ح س نرسم قوسا تحت المستقيم ا ب فيتقاطع القوسان في ص
صل

س ص قاطعا للمستقيم ا ب في م

س م عمودا على ا ب

فيكون

ح س ح د س ح ح ص ح د ص

البرهان — نصل

ح س ص ح د س ص

ففي المثلثين

ح س ح د س

ح ص ح د ص

س ص مشترك

من حيث ان

(نظرية ٧)

ح س ح د س = ح د س ص

∴

ح س م ح د س م

وفي المثلثين

ح س م ح د س

س م مشترك

ح س م ح د س م

من حيث ان

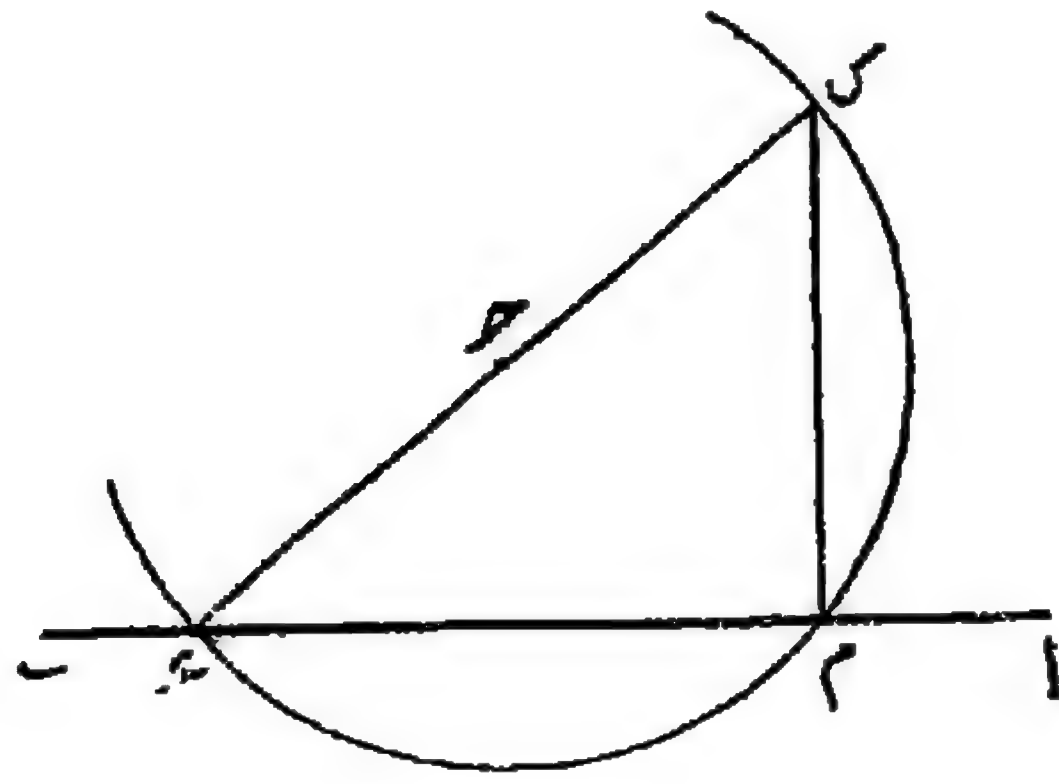
(نظرية ٤)

ح س م ح د س م

∴

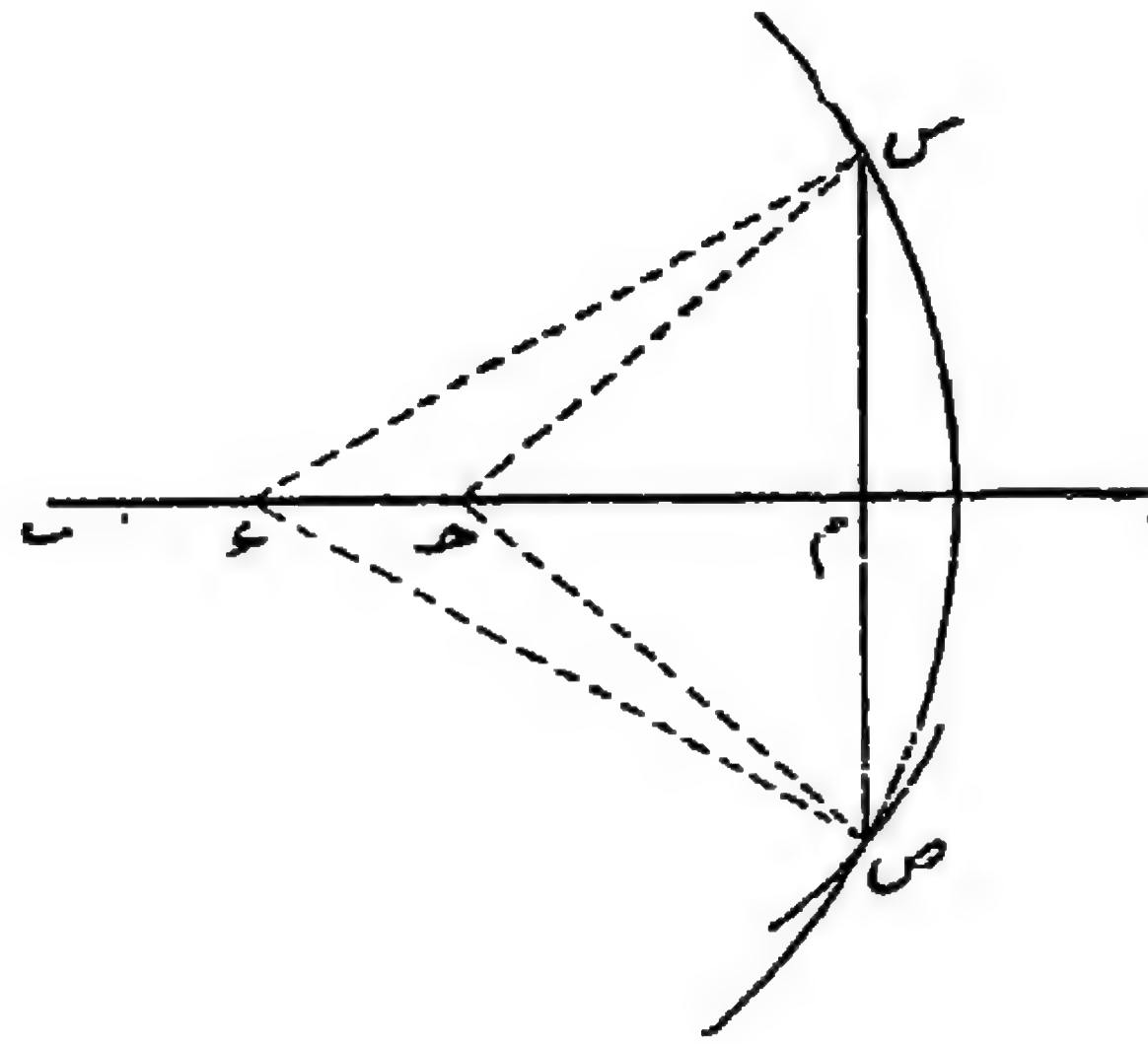
ومن حيث ان هاتين الزاويتين متجاورتان فكل منهما قائمة أى أن س م عمود على ا ب
تنبيه — اذا كانت نقطة س قريبة من احدى نهايتي المستقيم المعلوم يمكن اتباع احدى الطريقتين
الآتيتين

الطريقة الأولى



العمل — نفرض أى نقطة مثل د على ا ب
ونصل س د
ثم نتصفه فى ح ونركز فيها وببعد يساوى ح س نرسم
محيط دائرة يقطع ا ب فى م ويمر بنقطة د
نصل س م فيكون هو العمود على ا ب لأنه كما
تقدم فى عملية ٣ (بالطريقة الأولى) د س م د قائمة

الطريقة الثانية



العمل — نفرض أى نقطتين مثل د ك على ا ب
ثم نركز فى د وبنصف قطر يساوى د س نرسم
قوسا فى الجهة الأخرى من ا ب غير التى فيها س
ثم نركز فى ح وبنصف قطر يساوى ح س نرسم
قوسا آخر يقطع الأول فى ص
نصل س ص قاطعا ا ب فى م
فيكون س م هو العمود

البرهان — $\triangle س د ح$ يتطابق على $\triangle ص د ح$ تمام الانطباق (نظرية ٧)

$$\therefore د س د ح = د ص د ح$$

$\triangle س د م$ ينطبق على $\triangle ص د م$ تمام الانطباق (نظرية ٤)

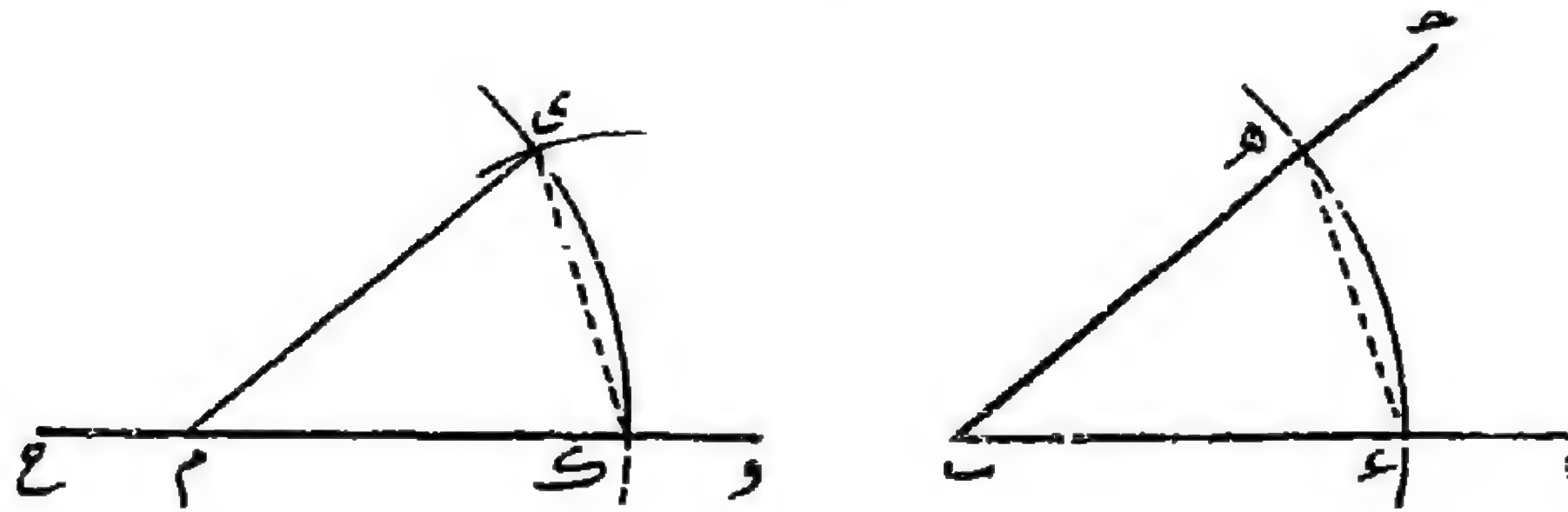
$$\therefore د س م د = د ص م د$$

ومن حيث انهما متجاورتان فكل منهما قائمة

أى أن س م عمود على ا ب

عملية هـ

المطلوب مد مستقيم يصنع مع آخر معلوم من نقطة مفروضة عليه زاوية تساوى زاوية معلومة



نفرض ان ا ب ح الزاوية المعلومة و ع المستقيم المعلوم و م النقطة المفروضة عليه التي يراد مد مستقيم منها يصنع مع و م زاوية تساوى ا ب ح

العمل - نرکز في ب و بنصف قطر مناسب نرسم قوسا يقطع ب ا في د و ب ح في هـ

ثم نرکز في م و بالبعد عينه نرسم قوسا يقطع و ع في ك

نرکز في ك و بنصف قطريساوى د هـ نرسم قوسا يقطع الأول في ي

نصل م ي فتكون ي م ك هي الزاوية المطلوبة

البرهان - نصل هـ د و ك ي ك

ففي المثلثين ي م ك و هـ ب د

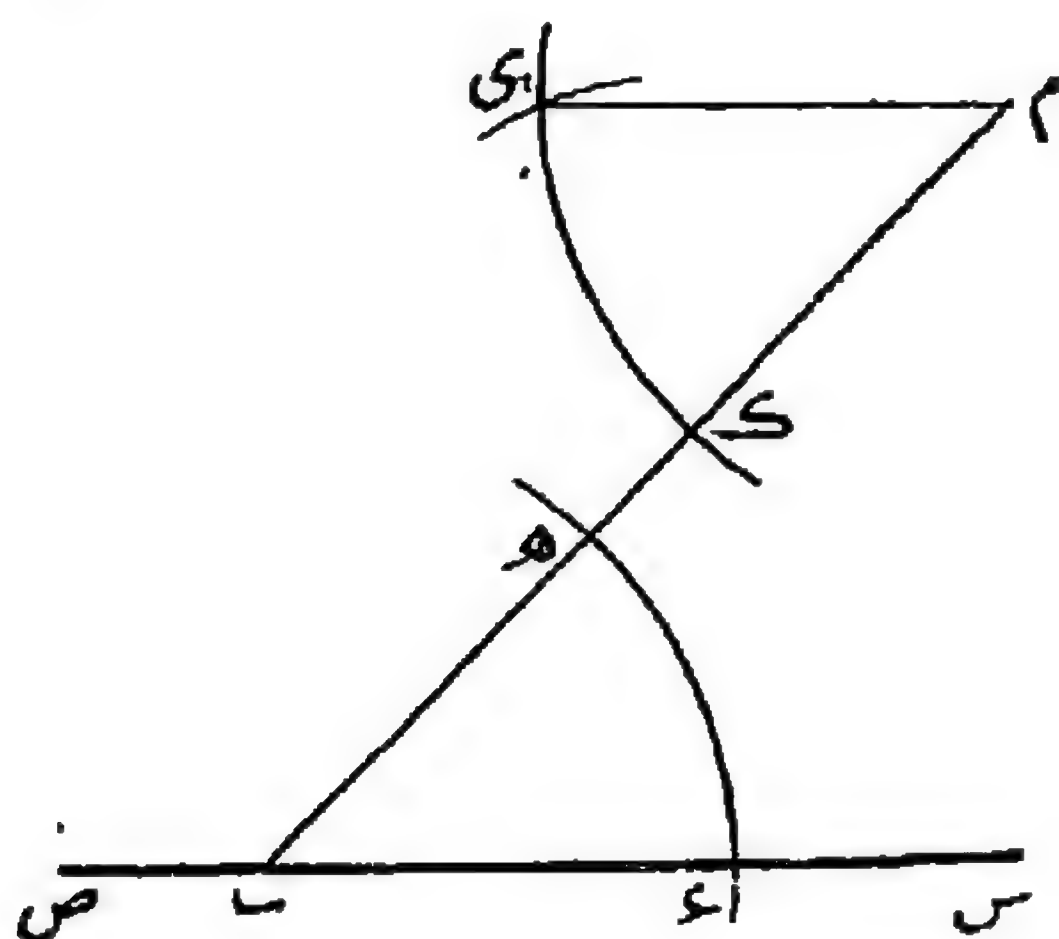
من حيث ان $\left. \begin{array}{l} م ي = ب هـ \\ م ك = ب د \\ ي ك = هـ د \end{array} \right\}$ لأنهما نصفان قطري دائرتين متساويتين
للسبب عينه
بالعمل

∴ ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق

أى أن د ي م ك = د هـ ب د (نظرية ٧)

عملية ٦

المطلوب رسم مستقيم يوازي آخر معلوما من نقطة مفروضة



نفرض ان س ص المستقيم المعلوم ب م النقطة المفروضة التي يراد مدّ مستقيم منها يوازي س ص
العمل — نفرض نقطة ما مثل ب على س ص ونصل م ب
ثم نرسم من نقطة م المستقيم م ي صانعا مع م ب زاوية ي م ب تساوي زاوية م ب س
(بعملية هـ) وتكون متبادلة معها

فيكون م ي موازيا س ص*

البرهان — من حيث ان ب م قاطع للمستقيمين م ي و س ص
والزاويتان المتبادلتان ي م ب و س ب م متساويتان
∴ م ي يوازي س ص

* كثيرا ما يسهل رسم الأعمدة والمتوازيات في العمليات ٣، ٤، ٦ باستعمال المثلثات ولذا يستغنى عادة عن اجراء العمل على الكيفية المبينة هنالك

تمارين على الخطوط والزوايا (تمارين تخطيطية)

- ١ المطلوب رسم زاوية تساوى ٦٠ باستعمال المسطرة والبرجل فقط وتقسيمها الى أربعة اقسام متساوية بطريقة تنصيف الزوايا
- ٢ قسم الزاوية القائمة الى ثلاثة أقسام متساوية بواسطة التمرين السابق ثم نصف كلا من هذه الأقسام وبذلك بين كيفية تقسيم زاوية ٩٠ الى ثلاثة أقسام متساوية
[تنبيه — لم يعلم حتى الآن حل لتقسيم أى زاوية الى ثلاثة أقسام متساوية]
- ٣ المطلوب تقسيم مستقيم طوله ٦,٧ من السنتيمترات الى ٥ أقسام متساوية وقياس أحدها بالبوصة (لأقرب جزء من مائة) وتحقيق الناتج بالحساب (مع العلم بأن السنتيمتر = ٠,٣٩٣٧ من البوصة)
- ٤ المطلوب تقسيم مستقيم طوله ٧,٤ من السنتيمترات الى ٧ أقسام متساوية ثم قياس أحدها بالسنتيمترات الى اقرب مليمتر وتحقيق الناتج بالحساب
- ٥ ا ب مستقيم معلوم ونقطة س مفروضة عليه أقنا منها عليه العمود س د الذى طوله ٦ سنتيمترات رسمنا د ح مائلا طوله ١٠ سنتيمترات تلاقى مع ا ب فى ح والمطلوب قياس س ح

(تمارين عملية)

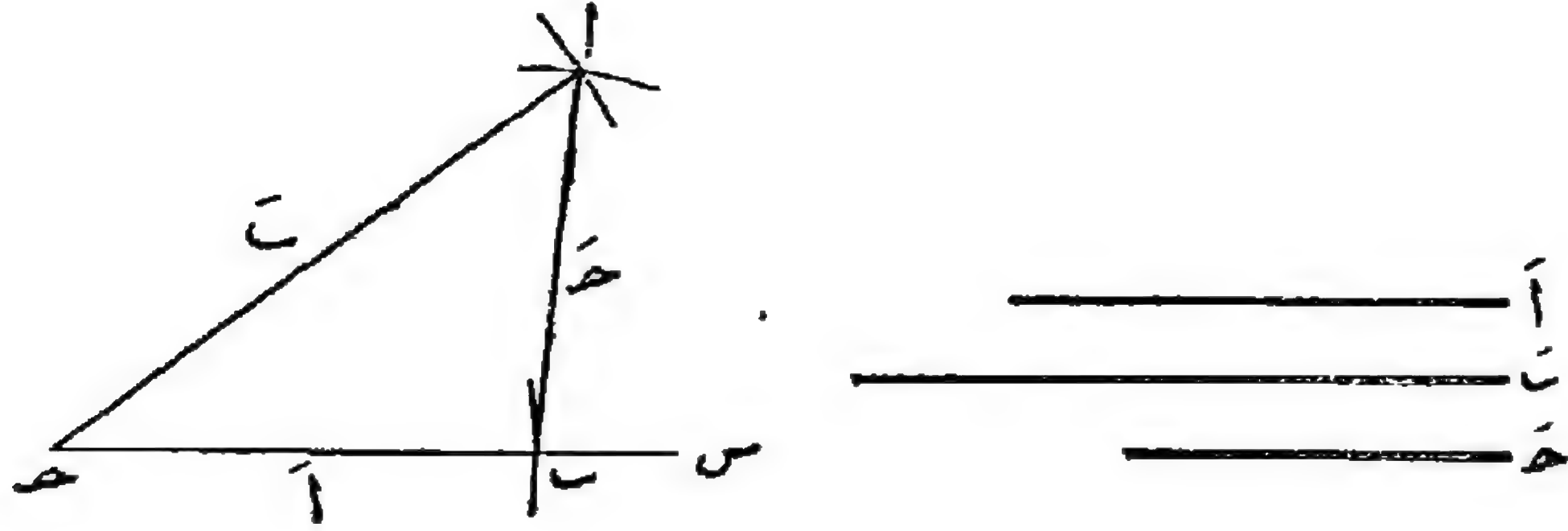
(اشرح كيفية العمل مع البرهان)

- ٦ المعلوم مستقيم مثل س ص ونقطتان مثل ا ب والمطلوب تعيين نقطة على هذا المستقيم تكون على بعدين متساويين من ا ب متى يستحيل الحل
- ٧ المطلوب تعيين نقطة على المستقيم المعلوم س ص بحيث تكون على بعدين متساويين من مستقيمين متقاطعين مثل ا ب ا ب متى يستحيل الحل
- ٨ المطلوب مد مستقيم من نقطة مفروضة يصنع مع آخر معلوم زاوية تساوى مقدارا معلوما
- ٩ ا ب مستقيم معلوم ا ب ح د نقطتان خارجتان عنه فى جهة واحدة منه والمطلوب رسم مستقيمين منهما على شرط أن يتلاقيا على ا ب ويصنعا معه زاويتين متساويتين
[العمل — ننزل من ح العمود ح ه على ا ب ونمده على استقامته الى ح بحيث يكون ه ح = ه ح ثم نصل ح د فيقطع ا ب فى و
نصل ح و ثم نبرهن على أن ح و د و هما المستقيمان المطلوبان]
- ١٠ ارسم مستقيما يمر بنقطة مفروضة مثل ح بحيث يكون العمودان النازلان عليه من نقطتين معلومتين مثل ا ب متساويين وبين ان كانت هذه المسألة ممكنة الحل دائما

في انشاء المثلثات

عملية ٨

المطلوب انشاء المثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة



نفرض ان $أ ب$ $ب ج$ $أ ج$ أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث
 العمل - نرسم المستقيم $ج س$ ونأخذ عليه البعد $ج ب = أ$
 ثم نركز في $ب$ وبنصف قطريساوي $ج أ$ نرسم قوسا
 ثم نركز في $ج$ وبنصف قطر $أ ب = ب$ نرسم قوسا آخر يقطع الأول في $أ$
 نصل $أ ب$ $أ ج$

فيكون $أ ب ج$ المثلث المطلوب لأن الأضلاع $ب ج$ $ج أ$ $أ ب$ تساوي على الترتيب
 $أ ب$ $ب ج$ $أ ج$

ملاحظة - الفروض الثلاثة $أ ب$ $ب ج$ $أ ج$ إما أن تمثل على مستقيمات تساوي في الطول
 اضلاع المثلث المراد انشاؤه أو على أعواد دالة على أطوال هذه الأضلاع بأي وحدة كانت كالسنتيمتر
 أو البوصة

تنبيه ١ - لا يمكن حل المسألة المتقدمة يلزم أن يكون مجموع أي ضلعين في المثلث أكبر من
 الثالث (نظرية ١١) لأنه اذا لم يتوفر هذا الشرط وركزنا في $ب$ $ج$ لا يتقاطع القوسان في $أ$
 تنبيه ٢ - اذا ركزنا في $ب$ $ج$ ورسمنا قوسين فانهما يتقاطعان في $أ$ ويتقاطعان كذلك
 في نقطة أخرى في الجهة الثانية من المستقيم $ب ج$ اذا مددنا القوسين وعلى ذلك فالمسألة حلان

ملاحظة على انشاء المثلثات

قد رأينا مما تقدم في صفحة ٥٥ أنه للبرهنة على امكان انطباق المثلثين كل على الآخر تمام الانطباق يلزم أن تساوى ثلاثة أجزاء من أحدهما نظائرها من الثانى لكن يجب فى الأجزاء المذكورة أن تكون مقيدة بشروط مخصوصة إن لم تتوفر لا يلزم انطباق المثلثين

وعلى ذلك يتعين المثلث شكلا ومساحة متى علمت منه ثلاثة أجزاء بشروط مخصوصة

فمثلا يمكن انشاء المثلث اذا علم منه

(أولا) ضلعان (ب ٦ ٢) والزاوية المحصورة بينهما (١)

وطريقة العمل فى هذه الحالة واضحة

(ثانيا) زاويتان (١ ٦ ب) وضلع (٦)

فلكون الزاويتين ١ ٦ معلومتين يمكن إيجاد الزاوية الثالثة ٢ من المتساوية

$$١٨٠ = ٢ + ب + ١$$

ويكفى لانشاء المثلث أن نرسم مستقيما ٦ نجعله قاعدة ونرسم من نهايتيه مستقيمين يصنعان معه

زاويتين تساوى احدهما ب والأخرى ٢

فالزاوية الحادثة من تلاقى هذين المستقيمين يجب ان تساوى

الزاوية الثالثة ١

(ثالثا) اذا علم من المثلث زوايا المثلث ١ ٦ ب ٢ (على شرط ألا يعلم مع هذا ضلع من

أضلاعه) وأريد انشاؤه فانه يمكن انشاء عدة مثلثات زوايا كل منها تساوى نظائرها من الزوايا المعلومة

لأننا اذا رسمنا مستقيما وأخذنا عليه طولاً ما وجعلناه قاعدة ورسمنا من نهايتيه مستقيمين يصنعان معها

زاويتين تساوى احدهما زاوية من الزوايا المعلومة (ب مثلاً) وتساوى الأخرى ٢ فان الزاوية الثالثة الحادثة

من تلاقى هذين المستقيمين تساوى نظيرتها ١ وبهذه الطريقة يمكن رسم عدة مثلثات على قواعد مختلفة

زوايا كل منها تساوى الزوايا المعلومة

وعلى ذلك فالمسألة لانهاية لعدد حلولها وذلك لان الأجزاء الثلاثة المعلومة مرتبط بعضها ببعض ارتباطا

خاصا بحيث لو علم منها اثنان علم الثالث

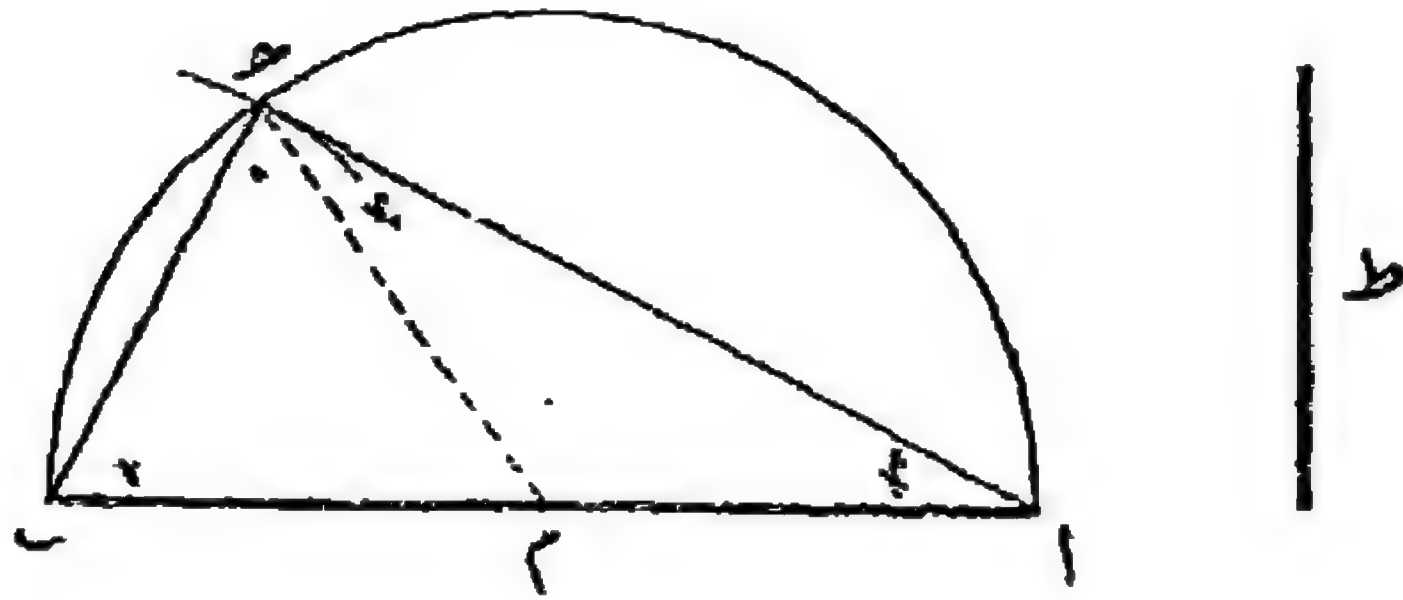
ويشترط فى الأجزاء الثلاثة المعلومة من المثلث المراد انشاؤه ألا يكون بينها مثل هذا الارتباط

ويقال للفروض التى ليس بينها مثل هذا الارتباط أنها مطلقة أى أن كلا منها قائم ذاته لا يتقيد

بالفرضين الآخرين ولا يتوقف عليهما فلا يعلم متى علما ولا يتبعهما اذا تغيرا

عملية ١٠

المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر وأحد الضلعين الآخرين



نفرض أن AB الوتر المعلوم و $ط$ الضلع المفروض

العمل - نصف AB في $م$ ونركز فيها وننصف قطر يساوي $م$ نرسم نصف محيط دائرة

ثم نركز في $ب$ وننصف قطر يساوي $ط$ نرسم قوسا يقطع نصف المحيط في $ح$

نصل $ح$ ب و $ح$ أ

فيكون $أ$ ب ح المثلث المطلوب

البرهان - نصل $ح$ ب

فمن حيث أن $م$ ب = $م$ ح

$\therefore \angle م ب ح = \angle م ح ب$

ومن حيث أن $أ$ م = $أ$ ح

$\therefore \angle أ م ح = \angle أ ح م$

\therefore الزاوية الكلية $ب ح أ = \angle م ب ح + \angle م ح ب = \angle أ م ح + \angle أ ح م$

$= \frac{1}{2} \times 180^\circ$ (نظرية ١٦)

$= 90^\circ$

تمارين على انشاء المثلثات (تمارين تخطيطية)

١ ارسم مثلثا أطوال أضلاعه ٧,٥ من السنتيمترات ٦,٢ من السنتيمترات ٥,٣ من السنتيمترات ثم ارسم وقس الأعمدة النازلة من رؤوسه على الأضلاع المقابلة لها [تنبيه - هذه الأعمدة تتقاطع في نقطة واحدة اذا رسمت بالدقة كما سيتبين بعد في صفحة ٢٢٦]

٢ ارسم المثلث ا ب ج الذي فيه ا = ٦ سنتيمترات ٦ ب = ٥ سنتيمترات ٦ ج = ٥,٥ من السنتيمترات ثم نصف ا بمستقيم يقابل القاعدة في س وقس ب س ٦ ج س (لأقرب مليمتر) واستخرج مقدار $\frac{ب س}{ج س}$ الى رقم واحد عشري وقارن الناتج بمقدار $\frac{ب}{ج}$

٣ مزرعة على شكل مثلث طول ضلعين من أضلاعه ٣١٥ مترا ٢٦٠ مترا والزاوية المحصورة بينهما تساوي ٣٩° والمطلوب رسم شكل (مقياس رسمه سنتيمتر لكل ٥٠ مترا) وإيجاد طول الضلع الثالث بواسطة القياس

٤ قطعة أرض على شكل مثلث مثل ا ب ج قاعدته ب ج = ٧٥ مترا ٦ ج = ٤٧ ٦ ا = ٦٨ والمطلوب رسم شكل لذلك (مقياس رسمه سنتيمتر لكل ١٠ أمتار) وإيجاد مقدار ا ب دون أن تقاس وطول كل من الضلعين الآخرين بواسطة القياس وكذلك العمود النازل من ا على ب ج

٥ خرجت سفينة من ميناء متجهة نحو الشمال الشرقى بسرعة ٩ كيلومترات في الساعة وبعد ٢٠ دقيقة غيرت اتجاهها نحو الشمال الغربى وسارت مدة ٣٥ دقيقة بالسرعة نفسها فما بعدها الآن عن الميناء واذا أرادت الرجوع فأى اتجاه (على وجه التقريب) تتجه اليه في سيرها . ضع لذلك خريطة مقياس رسمها سنتيمتران لكل كيلومتر

٦ ارسم مثلثا قائم الزاوية وتره ج = ١٠,٦ من السنتيمترات وضلعه ا = ٥,٦ من السنتيمترات ثم قس مقدار الضلع الثالث ب واستخرج مقدار $\frac{ب}{ج} - \frac{ا}{ج}$ وقارن المقدارين

٧ ارسم مثلثا فيه ا ب = ٣,٤ والضلع ب = ٥,٥ من السنتيمترات ٦ ج = ٨,٥ من السنتيمترات وبين أن للسألة حلين ثم قس كلا من مقداري ا في المثلثين الحادئين ومقدارى ا ب وبين ان مقدارها في أحدهما يكمل مقدارها في الآخر

٨ في المثلث ا ب ج الزاوية ا = ٥٠° والضلع ب = ٦,٥ من السنتيمترات ويراد رسم مثلث فيه (أولا) ا = ٧ سنتيمترات و (ثانيا) ا = ٦ سنتيمترات و (ثالثا) ا = ٥ سنتيمترات و (رابعا) ا = ٤ سنتيمترات . بين بالرسم كل الحلول الممكنة في كل حالة

٩ طريقان متعامدان في ا تقطعهما ترعة مستقيمة أحدهما في ب والآخر في ج حيث أقيمت في كل منهما قنطرة فاذا كانت المسافة بين القنطرتين ب ج هي ٤٦١ مترا والمسافة بين ملتقى الطريقين ا والقنطرة ب هي ٢٦١ مترا فانه يطلب وضع رسم يمكن به معرفة طول المسافة من ا الى ج بالقياس

تمارين عملية

(اشرح كيفية العمل مع البرهان)

١٠ ارسم مثلثا متساوي الساقين قاعدته $= ٤$ سنتيمترات وارتفاعه $٦,٢$ من السنتيمترات ثم برهن على أن الساقين متساويان وقس كلا منهما الى أقرب مليمترا

١١ ارسم مثلثا متساوي الساقين زاوية رأسه تساوي زاوية معلومة والعمود النازل من الرأس على القاعدة يساوي طول معلوما

ومن ذلك بين طريقة رسم مثلث متساوي الأضلاع طول العمود النازل من أحد رؤوسه على الضلع المقابل له يساوي ٦ سنتيمترات ثم قس أحد أضلاعه الى أقرب مليمترا

١٢ ارسم المثلث $ا ب ح$ الذي فيه العمود النازل من $ا$ على $ب ح$ يساوي ٥ سنتيمترات والضلع $ا ب = ٨$ من السنتيمترات $ا ح = ٩$ سنتيمترات ثم قس $ب ح$

١٣ ارسم المثلث $ا ب ح$ الذي فيه الزاويتان $ب$ و $ح$ تساوي إحداهما الزاوية المعلومة ل والثانية تساوي زاوية معلومة أخرى هي ٢ والعمود النازل من $ا$ على $ب ح$ يساوي مستقيما معلوما مثل ٥

١٤ ارسم مثلثا مثل $ا ب ح$ (بدون استعمال المنقلة) معلوما منه الزاويتان $ب$ و $ح$ والضلع $ب ح$

١٥ ارسم مثلثا متساوي الساقين قاعدته تساوي طول معلوما وزاوية رأسه تساوي الزاوية المعلومة ل

١٦ ارسم مثلثا قائم الزاوية معلوما منه الوتر $ح ا$ ومجموع الضلعين الآخرين $ا ب + ب ح = ١٦$ وإذا كان $ح = ٥,٣$ من السنتيمترات $ا ب + ب ح = ٧,٣$ من السنتيمترات فانه يراد إيجاد كل من $ا ب$ و $ب ح$ بالرسم واستخراج مقدار ١٧ بالحساب

١٧ ارسم مثلثا اذا علم منه محيطه وزاويتا القاعدة فاذا كان $ا ب + ب ح + ح ا = ١٢$ سنتيمترا $ا ب = ٦$ و $ب ح = ٦$ و $ح ا = ٨٠$ فأنشئ المثلث

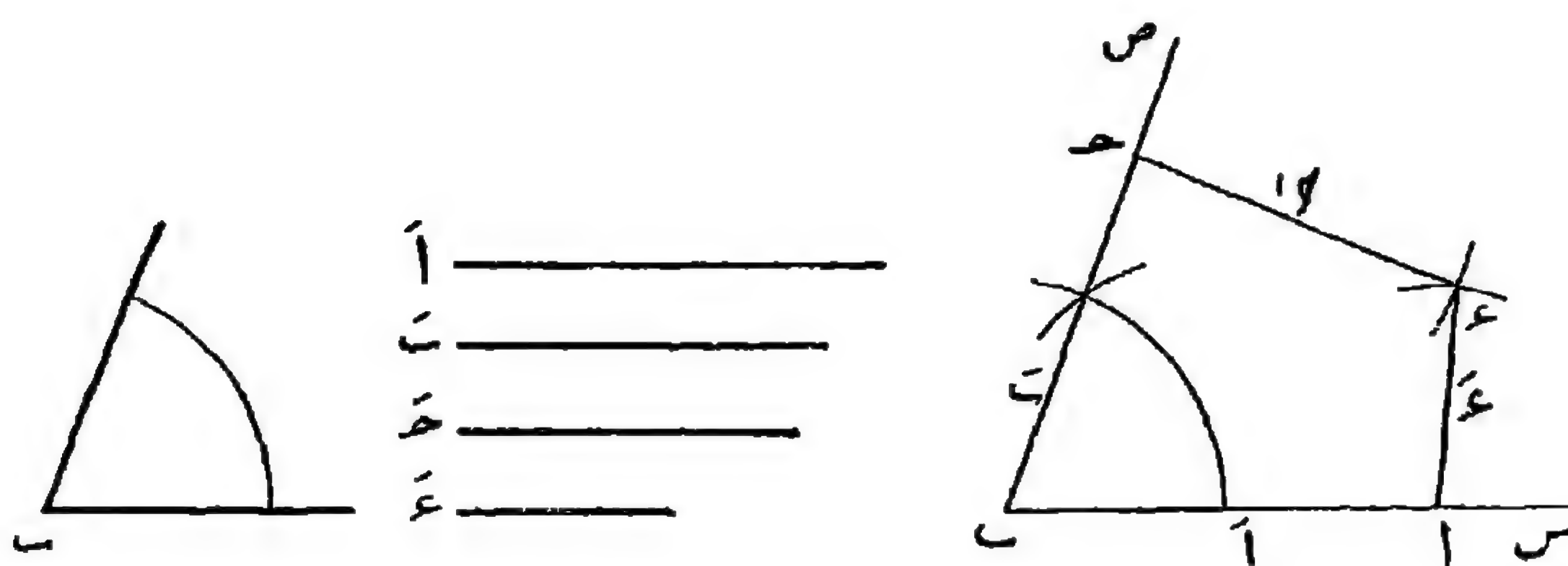
١٨ ارسم المثلث $ا ب ح$ اذا علم أن الضلع $ا ب = ٦,٥$ من السنتيمترات ومجموع الضلعين الآخرين يساوي ١٠ سنتيمترات $ا ب = ٦$ و $ب ح = ٦$

ثم قس كلا من الضلعين الآخرين $ب ح$ و $ح ا$

١٩ ارسم المثلث $ا ب ح$ اذا علم أن $ا ب = ٧$ سنتيمترات $ا ب = ٦$ و $ب ح = ٦$ سنتيمترا واحدا $ا ب = ٥٥$ ثم قس طول كل من $ب ح$ و $ح ا$

قد رأينا أن المثلث يتعين شكلا ومساحة اذا علمت مقادير أضلاعه الثلاثة أما الشكل الرباعي فلا يمكن تعيينه تماما من فروض أربعة بل يجب لانشاء الشكل الرباعي خمسة فروض مطلقة كما سيتبين بعد

المطلوب انشاء الشكل الرباعي المعلوم منه زاوية وأضلاعه الأربعة



نفرض أن Γ , Γ' , Γ'' أطوال أضلاع الشكل وأن α الزاوية المعلومة المحصورة بين الضلعين Γ و Γ'

العمل - نرسم مستقيماً مثل ب س ونأخذ عليه البعد ب ا = الطول l

ثم نرسم $\Delta A B C = \Delta B C D$ المعلومة

ونأخذ على b ص البعد $b = \text{الطول}$

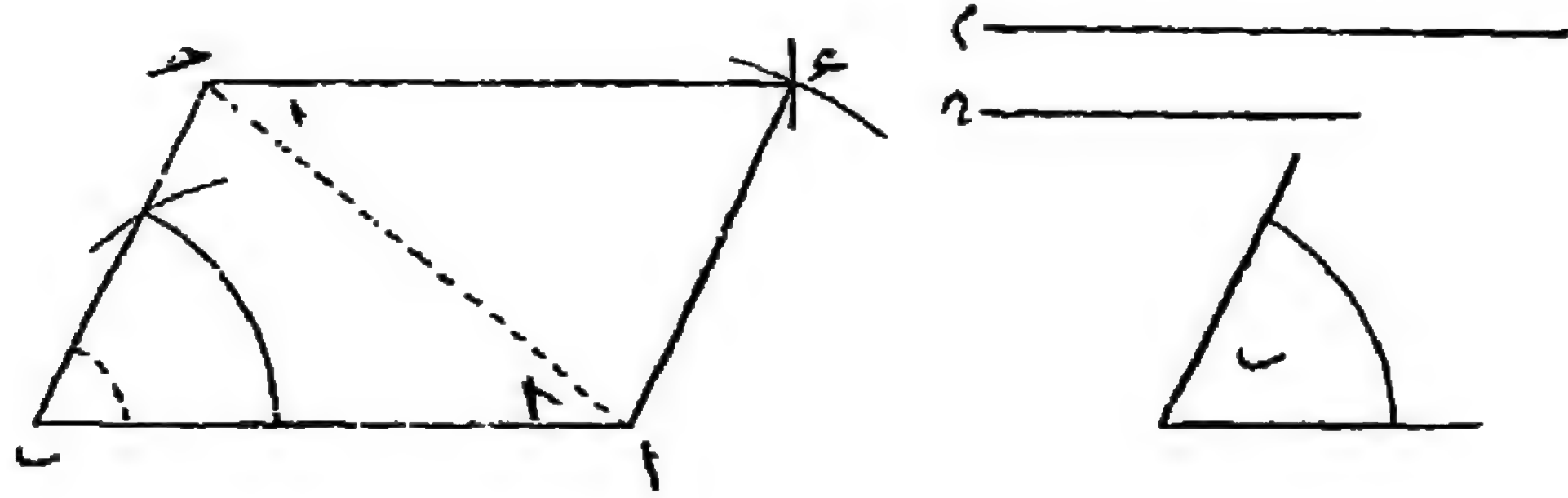
ثم نركز في h وننصف قطر $= h$ نرسم قوسا ونركز في a وننصف قطر $= s$
نرسم قوسا آخر يقطع الأول في d

نصل ٥ ٦ ٥

فيكون $\angle \alpha = \angle \beta$ هو الشكل الرابع المطلوب لأن أضلاعه تساوي الأطوال $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ و $\angle \alpha = \angle \beta$ المعلومة $\angle \gamma = \angle \delta$ = الزاوية المعلومة

عملية ١٢

المطلوب إنشاء متوازي الأضلاع المعلوم منه ضلعان متجاوران والزاوية المحصورة بينهما



نفرض أن $m \neq 6$ طول الضلعين المعلومين وأن \angle الزاوية المعلوم

العمل - (أولا) طريقة المسطرة والبرجل

نرسم المستقيم $ab = m$ ثم نرسم من النقطة b الزاوية \angle $ab = d$ ونجعل \angle مساويا \angle ثم نرسم \angle وننصف قطر m ونرسم قوسا ونرسم قوسا آخر يقطع الأول في d فيكون ab متوازي الأضلاع المطلوب

البرهان - نصل القطر ad

ففي المثلثين $\triangle abd$ و $\triangle dca$

$$ab = dc$$

$$\angle b = \angle c$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

$$\angle a = \angle d$$

من حيث ان

ولكنهما متبادلتين يكون

ولكن

ولكنهما متبادلتين يكون

ولكن

ولكنهما متبادلتين يكون

ولكن

ولكنهما متبادلتين يكون

ولكن

ولكنهما متبادلتين يكون

ولكن

ولكنهما متبادلتين يكون

ولكن

ولكنهما متبادلتين يكون

ولكن

ولكنهما متبادلتين يكون

ولكن

ولكنهما متبادلتين يكون

(نظرية ٧)

نظرية ٢٠

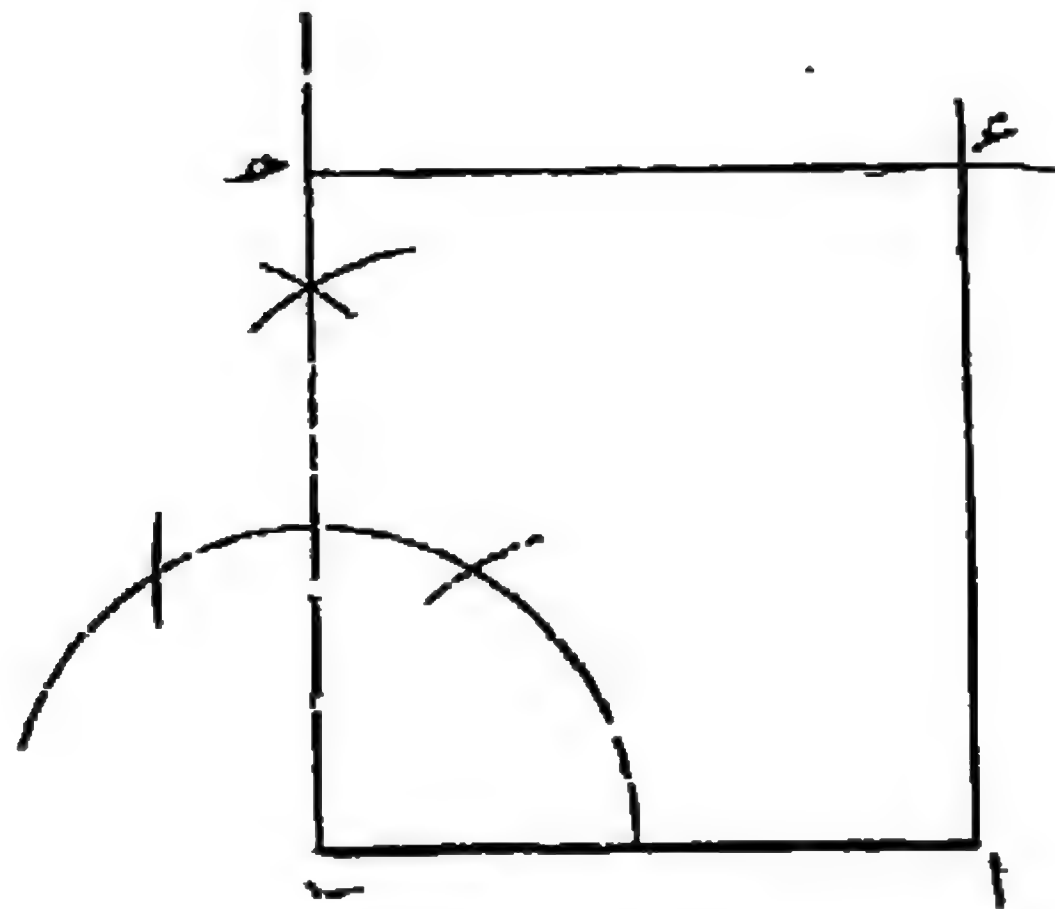
ab متوازي الأضلاع المطلوب

(ثانيا) طريقة المثلثات

نرسم ab كما تقدم وبواسطة المثلثات نرسم d مازا بنقطة c وموازي ab وبهما أيضا نرسم a مازا بنقطة a وموازي ab

فيكون ab متوازي الأضلاع بالعمل وهو المطلوب

المطلوب انشاء المربع المعلوم ضلعه



∴ ا ب ح د مربع

تمارين على انشاء الأشكال الرباعية

١ ارسم معينا ضلعه يساوى طولاً معلوماً وأحد قطريه يساوى هذا الطول كذلك وأوجد مقدار كل زاوية من زواياه دون أن تقيسها وبرهن على ذلك

٢ ارسم مربعاً طول ضلعه ٥ سنتيمترات وبرهن على أن قطريه متساويان وحقق صحة الرسم بقياس كل من هذين القطرين الى أقرب مليمتر

٣ ارسم مربعاً طول قطره ٦ سنتيمترات وقس كل ضلع على حدته وأوجد المتوسط للأقيسة الأربعة

٤ ارسم متوازي الأضلاع $ABCD$ على فرض أن أحد أضلعه وهو $AB = ٥,٥$ من السنتيمترات والقطر $AC = ٨$ سنتيمترات والقطر $BD = ٦$ سنتيمترات وقس AC

٥ شكل رباعي قطراه متساويان (طول كل منهما ٦ سنتيمترات) يمر كل منهما بمتصف الآخر ويصنع معه زاوية تساوى ٦٠° . بين أن فروض هذه المسألة خمسة مطلقة

ثم انشئ الشكل الرباعي واذكر نوعه وبرهن على ذلك وقس محيطه وأوجد مقدار زيادة هذا المحيط في المائة اذا فرض أن الزاوية المحصورة بين قطريه زادت الى أن صارت ٩٠°

٦ $ABCD$ شكل رباعي فيه $AB = ٥,٦$ من السنتيمترات $BC = ٦$ $CD = ٢,٥$ من السنتيمترات $DA = ٤$ سنتيمترات $AC = ١,٣$ من السنتيمترات

بين أن هيئة الشكل لا يمكن تعيينها من هذه الفروض

ارسم الشكل المذكور في حالة ما اذا كانت $AD = ٣,٠$ وفيما اذا كانت تساوى $٦,٠$ وبين السبب في عدم امكان رسم الشكل في حالة ما اذا كانت $AD = ١,٠$

وأوجد تخطيطياً أقل مقدار لزاوية A لا يمكن معه رسم الشكل

٧ كيف ترسم شكلاً رباعياً اذا علمت أضلعه الأربعة وأحد أقطاره

وما هى الشروط التى يلزم أن تتوفر فى الفروض المذكورة حتى يمكن حل المسألة

بين الطريقة لذلك بأن ترسم الشكل الرباعي $ABCD$ اذا كان

(أولاً) $AB = ٣$ بوصات $BC = ١,٧$ من البوصات $CD = ٢,٥$ من البوصات

$DA = ٢,٨$ من البوصات والقطر $AC = ٢,٦$ من البوصات ثم قس AB

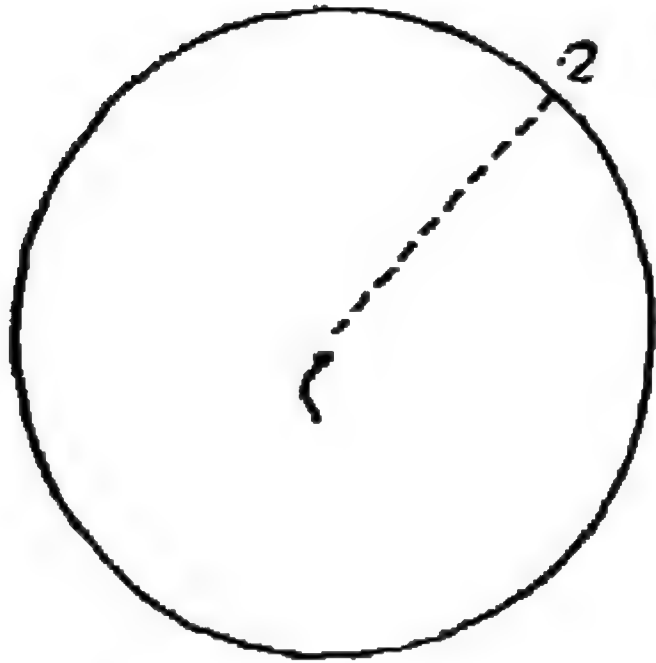
(ثانياً) $AB = ٣,٦$ من السنتيمترات $BC = ٧,٧$ من السنتيمترات $CD = ٦,٨$ من السنتيمترات

$DA = ٨,٥$ من السنتيمترات والقطر $AC = ٨,٥$ من السنتيمترات ثم قس كلا

من الزاويتين B و C

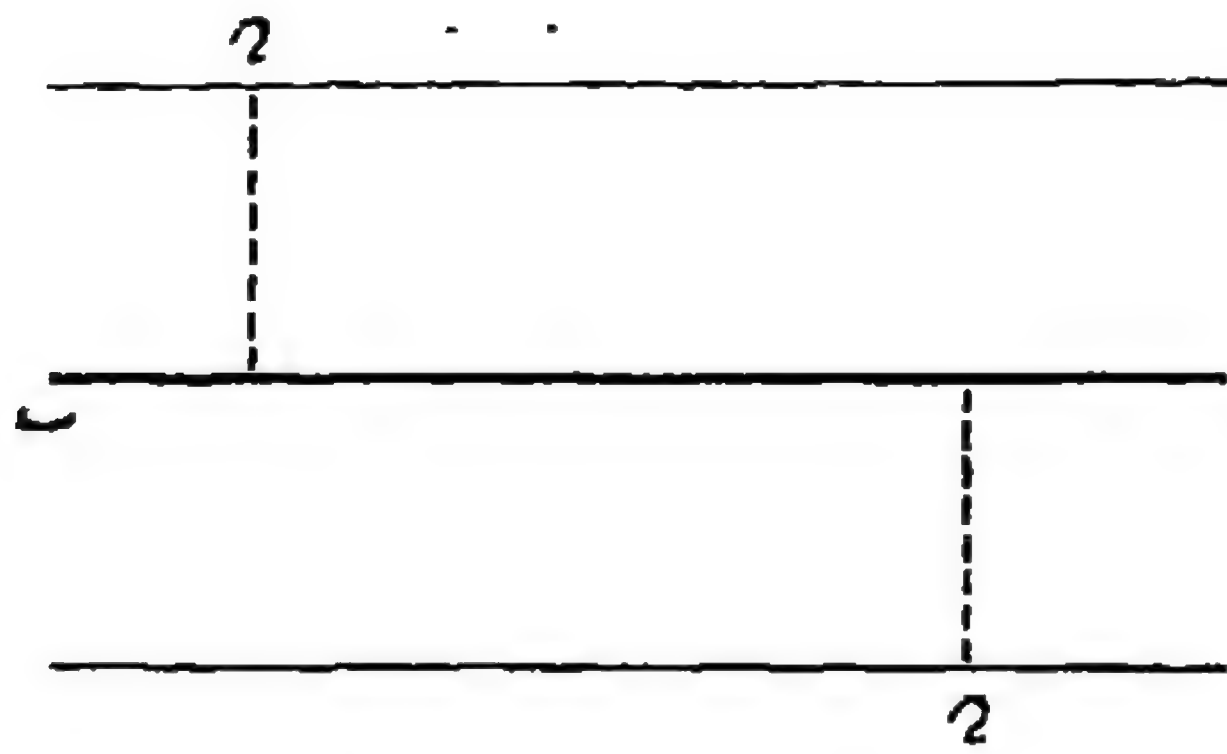
المحل الهندسي

تعريف — المحل الهندسي لنقطة هو مسار هذه النقطة مقيدة بشروط مخصوصة أثناء سيرها



فمثلا (١) اذا فرضنا أن نقطة ٢ تسير حول نقطة م على شرط مخصوص وهو أن يكون بعدها عن م دائماً ثابتاً لا يتغير (وليكن ١,٧ من السنتيمترات) فمسار هذه النقطة مقيدة بهذا الشرط هو محيط الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها البعد الثابت (١,٧ من السنتيمترات المفروضة) وهذا المحيط هو المحل الهندسي للنقطة ٢

(٢) اذا فرضنا أن النقطة ٢ تسير على بعد ثابت لا يتغير من المستقيم المعلوم ا ب (وليكن هذا البعد



سنتيمترا ونصف سنتيمتر مثلاً) فان المحل الهندسي لهذه النقطة في هذه الحالة هو أحد المستقيمين الموازيين للمستقيم المعلوم المرسومين كل في جهة منه على البعد الثابت (السنتيمتر والنصف) المفروض

ومن هذا نرى أن المحل الهندسي لنقطة تسير حسب شرط معين هو خط أو أكثر تقيد النقطة به

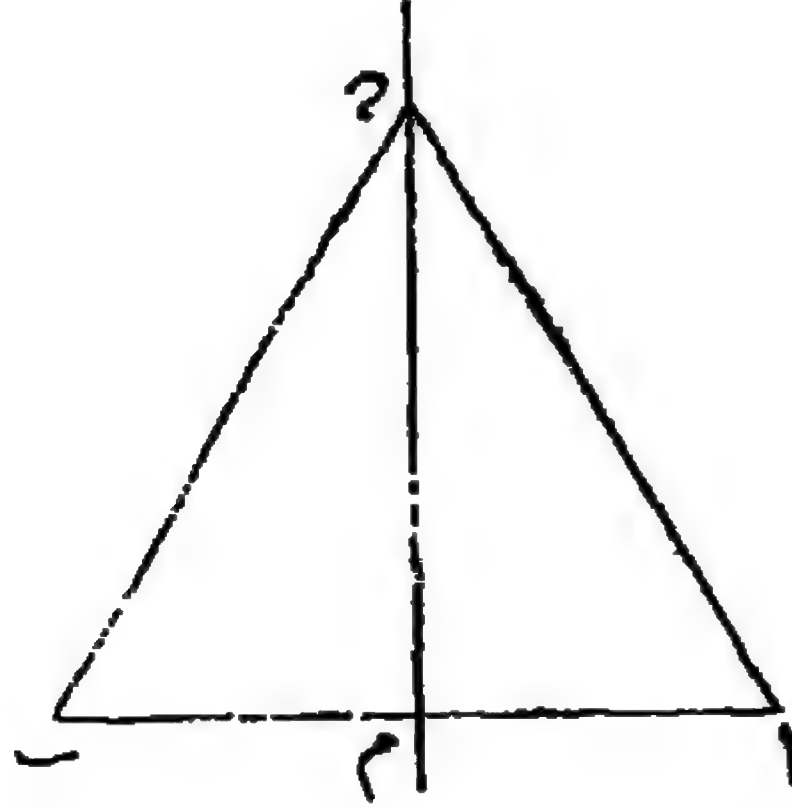
في سيرها عليه على شرط أن يكون لجميع نقط هذا الخط ما لهذه النقطة من الخواص وألا تتوفر هذه الخواص في أي نقطة أخرى خارجة عنه

أي أن نقط المحل الهندسي تشترك جميعها في خاصية واحدة لا تشترك معها في أي نقطة أخرى خارجة عنه

وعلى ذلك يكفي لتعيين المحل الهندسي لنقطة تسير مقيدة بشروط معينة أن توجد سلسلة نقط كل منها تستوفي هذه الشروط وتمربها النقطة المتحركة المراد تعيين محلها الهندسي

عملية ١٤

المطلوب إيجاد المحل الهندسى للنقطة (د) التى يعدها عن النقطتين المعطيتين (ا ب) دائما متساويان



يؤخذ من هذا أن النقطة د فى جميع أوضاعها أثناء سيرها يجب أن يكون بعدها عن ا ب دائما متساويين أى أن $د ا = د ب$

وعلى ذلك فمتصف ا ب وهو م يكون أحد أوضاع هذه النقطة أى أن م إحدى نقط المحل الهندسى فإذا فرضنا أن نقطة د هى أيضا إحدى نقط هذا المحل ووصلنا م د

حدث فى المثلثين $د ا م$ و $د ب م$ انه

$$د ا = د ب$$

م مشترك

$$د م = د م$$

من حيث ان

"

$$د ا م = د ب م$$

∴

(نظرية ٧)

د م عمود على ا ب من وسطه

وعليه فالمستقيم

ويكون هو المحل الهندسى المطلوب

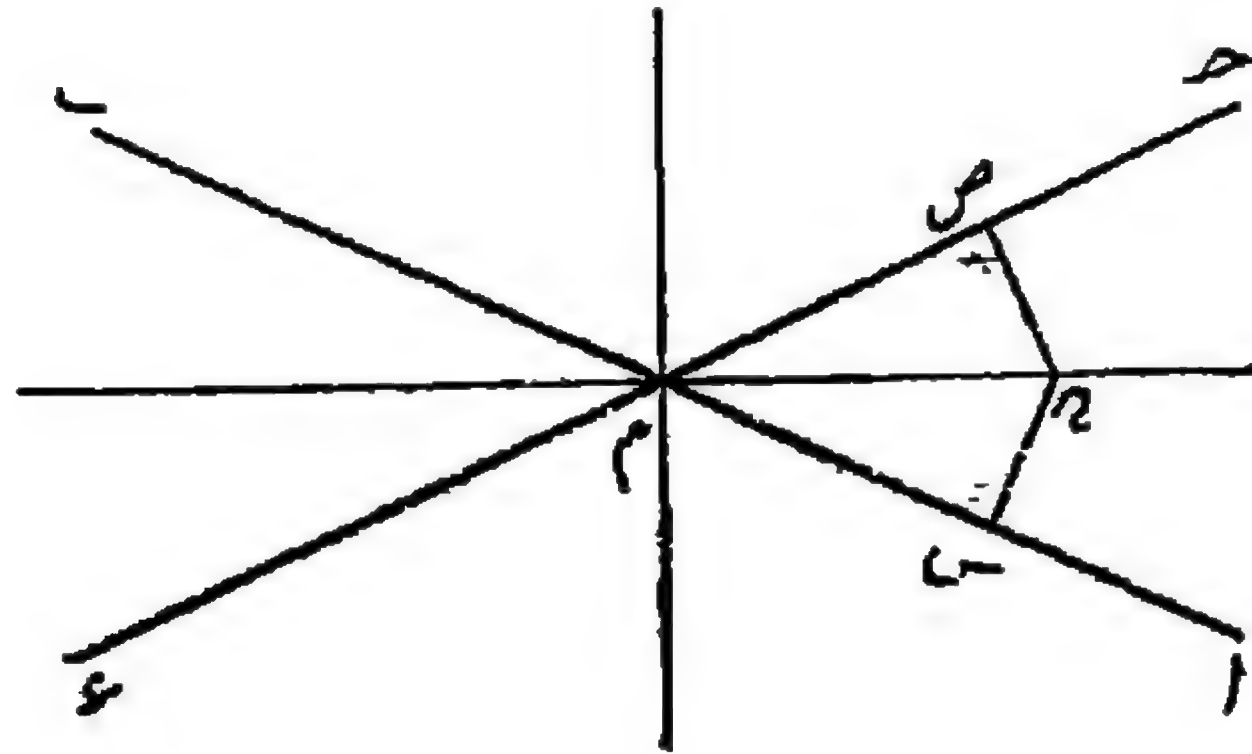
وذلك لأنه

(أولا) ثبت أن كل نقطة مثل د على بعدين متساويين من ا ب تكون إحدى نقط العمود المقام على ا ب من وسطه

(ثانيا) تسهل البرهنة على أن كل نقطة من نقط العمود المقام من م على ا ب تكون على بعدين متساويين من ا ب

عملية ١٥

المطلوب إيجاد المحل الهندسي للنقطة (د) التي بعداها عن المستقيمين المعلومين (أ ب و ح د) دائما متساويان



نفرض أن المستقيمين المعلومين أ ب و ح د يتقاطعان في م وأن د أحد أوضاع النقطة المعلومة فلو أنزلنا من د العمود د س على أ ب والعمود د ص على ح د لحدث على فرض المسألة أن

$$د س = د ص$$

د م يحدث

فاذا وصلنا

$$د س م و د ص م أنه$$

في المثلثين

بالقياس

$$د س م = د ص م$$

م مشترك

بالفرض

$$د س = د ص$$

(نظرية ١٨)

ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق

$$د س م = د ص م$$

ومنه ينتج أن

$$د م ينصف د أ م ح$$

أي أن المستقيم

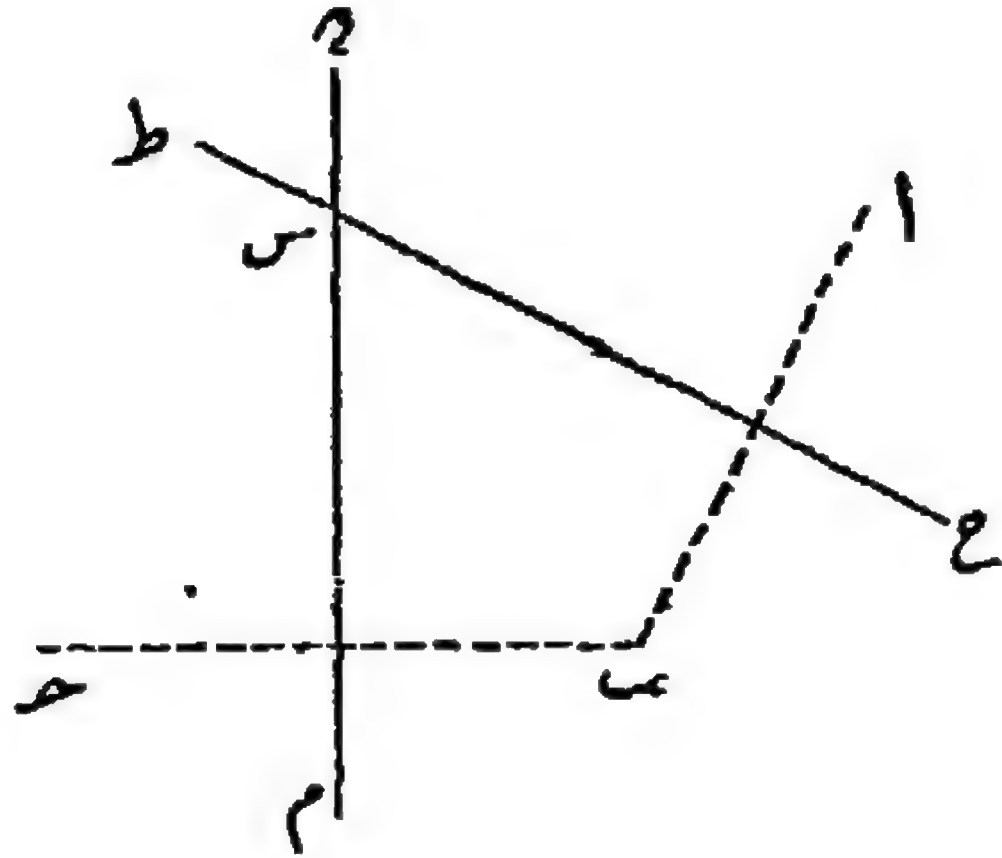
وعليه فإن كانت النقطة د داخل هذه الزاوية فتقيدها بشروط المسألة يستلزم أن تكون على منتصف الزاوية

ولو كانت د داخل د أ م ح لكانت على منتصف هذه الزاوية كذلك

وينتج من ذلك أن كلا من المستقيمين اللذين نصفان الزوايا المحصورة بين المستقيمين المعلومين هو المحل الهندسي المطلوب

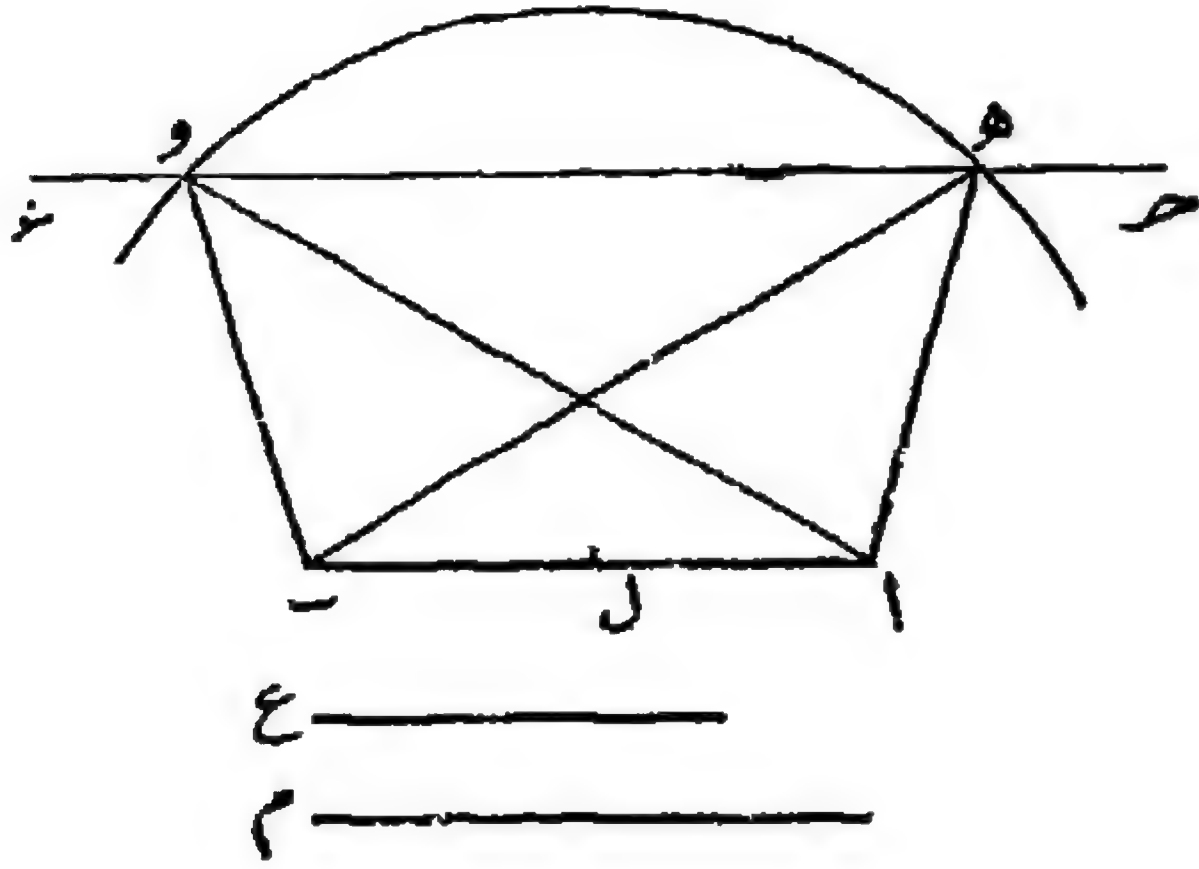
تقاطع المحال الهندسية

من فوائد المحال الهندسية أنه يمكن تعيين موضع أى نقطة تتقيد بشرطين وذلك لأن لكل شرط منهما محالا هندسيا خاصا به تسير فيه هذه النقطة فنقطة تقاطع هذين المحلين تستوفى الشرطين معا في آن واحد فمثلا (١) اذا أريد تعيين نقطة على أبعاد متساوية من ثلاث نقط معلومة مثل a و b و c ليست على استقامة واحدة يلاحظ



(أولا) أن المحل الهندسى للنقطة المتساوية البعد عن a و b هو العمود cd المقام على ab من وسطه
(ثانيا) أن المحل الهندسى للنقطة المتساوية البعد عن b و c هو العمود de المقام على المستقيم bc من وسطه
فالنقطة المشتركة بين هذين العمودين وهى نقطة تقاطعهما s تستوفى الشرطين في آن واحد أى أنها على أبعاد متساوية من النقط a و b و c

(٢) المطلوب انشاء المثلث اذا علم منه قاعدته وارتفاعه وطول المستقيم المتوسط المنصف للقاعدة



نفرض أن a ب قاعدة المثلث المطلوب انشاؤه وان c طول ارتفاعه d طول المستقيم المتوسط المنصف للقاعدة
فاذا علم وضع رأس المثلث أمكن انشاؤه
ولذلك (أولا) نرسم المستقيم cd يوازي a و
ويبعد عنه بمقدار يساوى الارتفاع c
فيكون رأس المثلث المطلوب احدى نقط هذا الموازي
(ثانيا) نركز في d منتصف ab وننصف قطر
يساوى المستقيم المتوسط d نرسم محيط دائرة
فيكون رأس المثلث المطلوب احدى نقط هذا المحيط

فالنقطة المشتركة بين المستقيم cd والمحيط اذن تستوفى الشرطين المفروضين
أى أنه اذا قطع المستقيم cd محيط الدائرة في النقطتين e و f فان كلا منهما تكون رأسا للمثلث المطلوب انشاؤه . هذا على فرض أن المستقيم المتوسط d أكبر من الارتفاع c
وقد ترتبط فروض المسألة بعضها ببعض بحيث لا تؤدى الى تقاطع المحلين الهندسيين فتكون المسألة غير ممكنة الحل كما لو كانت في المسألة السابقة المستقيم المتوسط أصغر من الارتفاع فعندئذ لا يتقاطع المستقيم cd والمحيط

ملاحظة — ينبغى في مسائل تقاطع المحال الهندسية أن يبحث دائما في الارتباطات التى يجب أن توجد بين فروض المسألة حتى يمكن حلها فان لوحظ ان للمسألة حلين لارتباطات مخصوصة بين الفروض وأن لاحل لها اذا تغيرت هذه الارتباطات فانه لابد أن يوجد بين الارتباطات الأولى والثانية وسط ترتبط به الفروض ارتباطا يتحد به الحلان ويصير للمسألة حل واحد

تمارين على المحال الهندسية

- ١ المطلوب تعيين المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعد ثابت من محيط دائرة معلومة (البعد هنا هو المسافة بين النقطة والمحيط على المستقيم الواصل بينها وبين المركز)
 - ٢ المعلوم المستقيم AB ونقطة C متحركة عليه . في أي وضع تكون C على بعدين متساويين من نقطتين أخريين مفروضتين خارج المستقيم AB
 - ٣ المعلوم نقطتان داخل دائرة والمطلوب تعيين نقط على المحيط كل منها على بعدين متساويين من النقطتين المعلومتين . ما عدد هذه النقط
 - ٤ المعلوم المستقيم AB ونقطة C متحركة عليه . في أي وضع تكون C على بعدين متساويين من المستقيمين المعلومين CD و CE و
 - ٥ AB نقطتان ثابتتان البعد بينهما 6 سنتيمترات والمطلوب إيجاد نقطتين كل منهما على بعد 4 سنتيمترات من A و 6 و 5 سنتيمترات من B
 - ٦ AB 6 و 4 مستقيمان معلومان والمطلوب إيجاد النقط التي تكون على بعد 3 سنتيمترات من A و 6 و 4 سنتيمترات من B . كم حلا لهذه المسألة
 - ٧ قضيب طوله معلوم يتزلق بين مسطرتين متعامدتين والمطلوب تعيين المحل الهندسي لمنتصفه وبيان أن هذا المحل هو ربع محيط دائرة (راجع عملية ١٠)
 - ٨ ماهو المحل الهندسي لرؤوس المثلثات القائمة الزوايا المرسومة على مستقيم معلوم هو وترها
 - ٩ المعلوم نقطة ثابتة مثل C خارج مستقيم مثل AB ونقطة H متحركة عليه ويراد تعيين المحل الهندسي لمنتصف CH والبرهنة على أنه مستقيم يوازي AB
 - ١٠ C نقطة ثابتة خارج محيط دائرة تتحرك عليه النقطة H . عين المحل الهندسي لمنتصف CH و برهن على أنه محيط دائرة (راجع تمرين ٣ صفحة ٦٩)
 - ١١ AB مستقيم معلوم 6 و 4 عمود على مستقيمان MA و MB بالנקطة B ماهو المحل الهندسي لمنتصف AB اذا تحرك B حول A
 - ١٢ المستقيمان MS و MS متعامدان في M فرضنا نقطة MA مثل C داخل الزاوية MSM وأنزلنا منها العمود CD على MS والعمود DE على MS والمطلوب تعيين المحل الهندسي للنقطة C بالرسم اذا كان
- (أولاً) C و D و E ثابتا (وليكن 6 سنتيمترات مثلاً)
- (ثانياً) C و D و E ثابتا (وليكن 3 سنتيمترات مثلاً)
- مع البرهنة على كل من الحالتين

١٣ المستقيان م س و م ص متعامدان في م و نقطة ما متحركة أنزلنا منها العمود د ه على م س والعمود د ز على م ص والمطلوب تعيين المحل الهندسي للنقطة د (بدون أن تبرهن على ذلك) إذا كان

$$(أولا) \quad د ه = د ز$$

$$(ثانيا) \quad د ه = د ز$$

١٤ المطلوب إيجاد نقطة على بعد معلوم من نقطة أخرى مفروضة وعلى بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين

متى يكون لهذه المسألة حلان ومتى يكون لها حل واحد ومتى يستحيل

١٥ نقطة ثابتة على بعد ٤ سنتيمترات من المستقيم المعلوم ا ب والمطلوب تعيين نقطتين على بعد $\frac{1}{2}$ من السنتيمترات من كل من النقطة ح والمستقيم ا ب

١٦ أوجد جملة نقط كل منها على بعدين متساويين من نقطة معلومة ومستقيم معلوم ثم صل بينها بنقط منحن

١٧ المطلوب إنشاء مثلث معلوم منه القاعدة والارتفاع بحيث يكون رأسه على مستقيم معلوم

١٨ المطلوب تعيين نقطة على أبعاد متساوية من أضلاع مثلث

١٩ م س و م ص مستقيان متعامدان في م فرضنا النقطة ح على م س والنقطة د على م ص عين المحل الهندسي لمتصف المستقيم ح د إذا كان

$$(أولا) \quad م ح + م د = مقدارا ثابتا$$

$$(ثانيا) \quad م ح - م د = مقدارا ثابتا$$

٢٠ م س و م ص نقطتان ثابتتان والمطلوب إيجاد عدة نقط مرموز لكل منها بالحرف د بحيث يكون

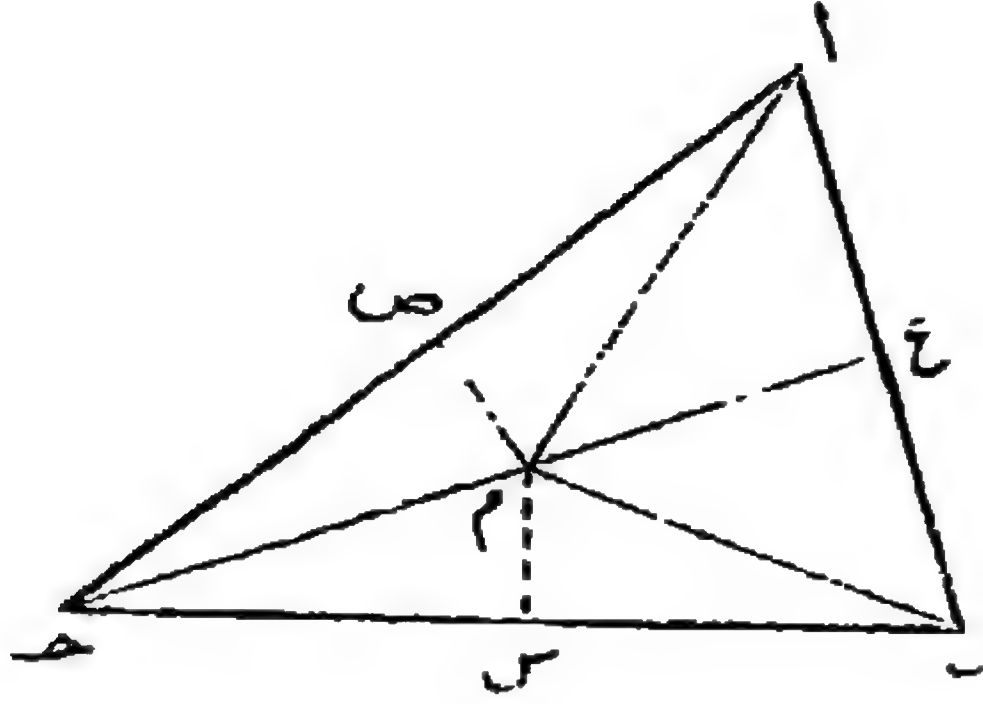
$$(أولا) \quad م س + م ص = مقدارا ثابتا (وليكن ٧ سنتيمترات)$$

$$(ثانيا) \quad م س - م ص = مقدارا ثابتا (وليكن ٣ سنتيمترات)$$

ثم صل كل هذه النقط بنقط منحن في كل من الحالتين

المستقيمات المتلاقية في نقطة واحدة في المثلث

١ الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من أوساطها تتلاقى جميعا في نقطة واحدة
نفرض أن ABC مثلث والنقط S و V و E منتصفات أضلاعه
نقيم من E عمودا على AB ومن S عمودا على AC فيتلاقيان في M
نصل MS



ثم نبين على أن MS عمود على AB
لذلك نصل MS $MS \perp AB$
البرهان — من حيث أن E عمود على AB من منتصفه
فهو المحل الهندسي للنقط التي على أبعاد متساوية
من A و B

$$\therefore MS = MB$$

ومن حيث أن S عمود على AC من منتصفه
فهو المحل الهندسي للنقط التي على أبعاد متساوية من A و C

$$\therefore MS = MC$$

$$MB = MC \text{ وعليه}$$

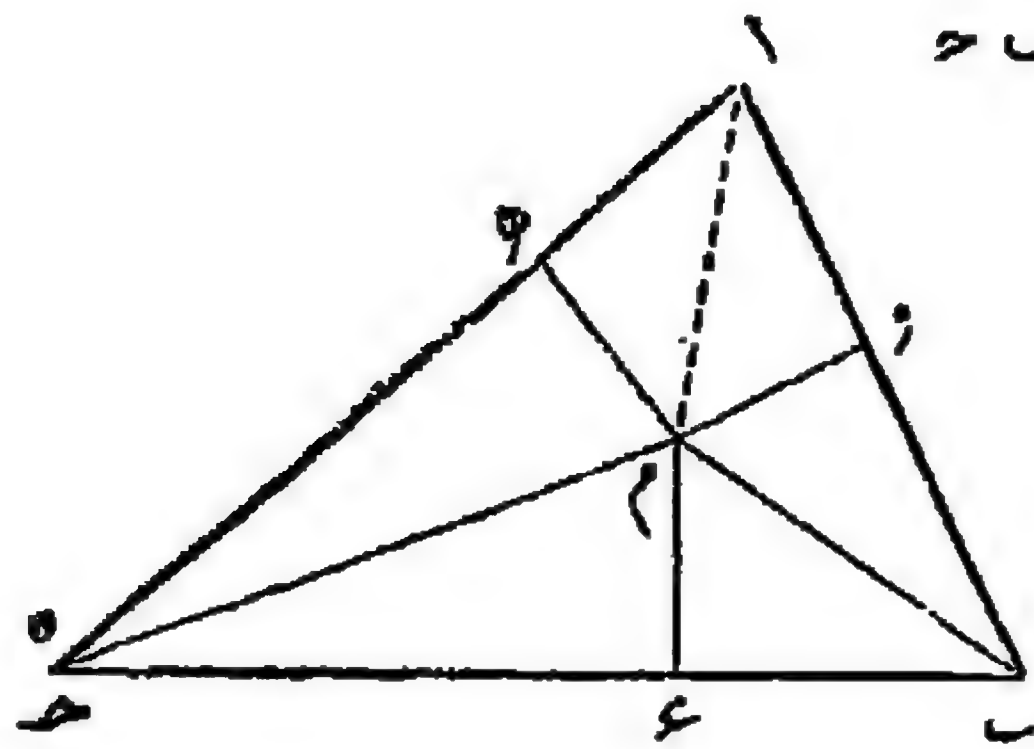
فتكون M إحدى نقط المحل الهندسي للنقط التي على أبعاد متساوية من B و C

أي أن MS عمود على BC

وعلى ذلك فالأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من أوساطها تتلاقى جميعا في M وهو المطلوب

٢ منصفات زوايا المثلث تتلاقى جميعا في نقطة واحدة

نفرض أن ABC مثلث نصفنا زواياه AB و AC
بمستقيمين يتلاقيان في M



نصل AM

ونبين على أن AM ينصف BC

لذلك نزل من M الأعمدة MD و ME و MF على أضلاع المثلث

البرهان — من حيث أن $م$ ينصف $د ا ب$ ح

فهو المحل الهندسى للنقط التى على أبعاد متساوية من $ب$ ح $ك ا$

$$\therefore م د = م و$$

وكذلك $ح م$ هو المحل الهندسى للنقط التى على أبعاد متساوية من $ب$ ح $ك ا$

$$\therefore م د = م ه$$

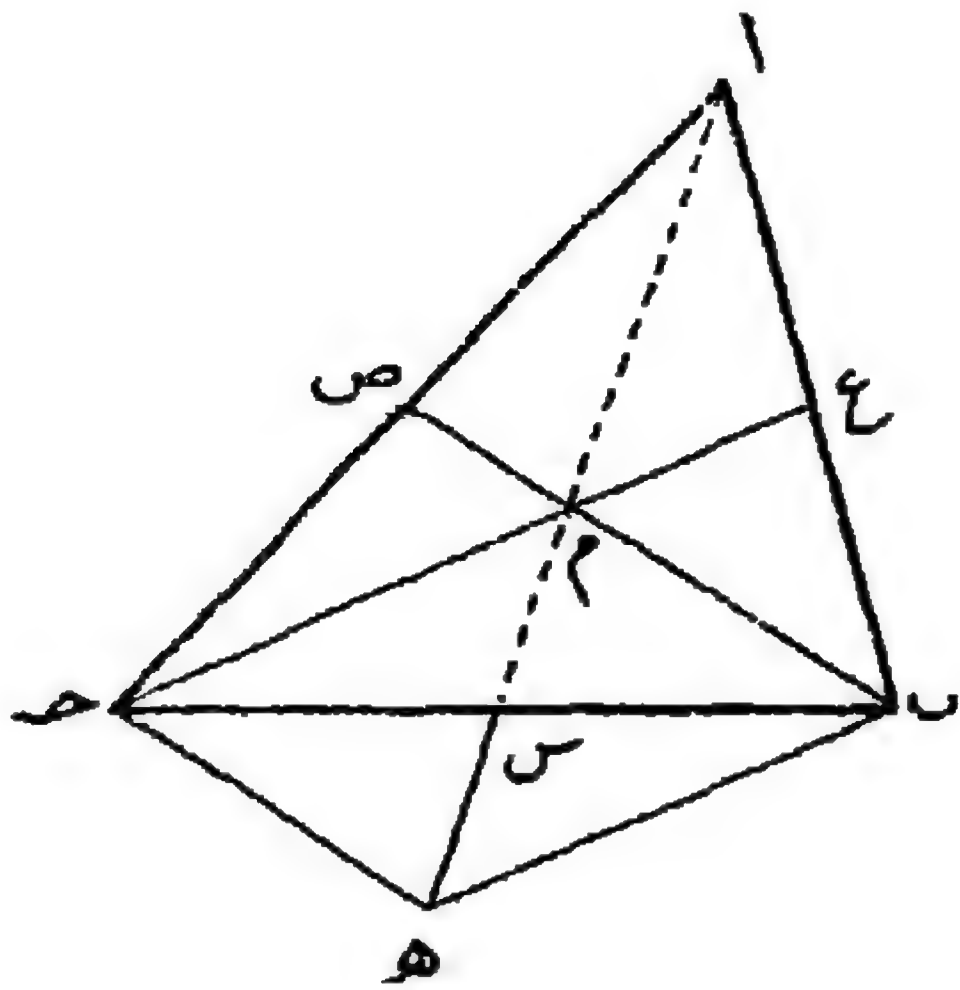
ومنه ينتج أن $م و = م ه$

$\therefore م$ احدى نقط المحل الهندسى للنقط التى على ابعاد متساوية من $ا ب ك$ ح

وعلى ذلك فمنصفات الزوايا تتلاقى جميعا فى نقطة $م$ وهو المطلوب

٣ المستقيمت المتوسطة للثلث تتلاقى جميعا فى نقطة واحدة

نفرض أن $ا ب ح$ مثلث $ك ب ص$ $ك ا ع$ مستقيمان متوسطان ومتلاقيان فى $م$



نصل $ا م$ ونمده على استقامته ليقابل $ب$ ح فى $س$

ونبرهن على أن $ا س$ ثالث المستقيمت المتوسطة للثلث

لذلك نرسم من $ب$ المستقيم $ب ه$ يوازي $ع$ ح ونمدا $ا س$

على استقامته ليقابل $ب ه$ فى $ه$ ونصل $ح ه$

البرهان — فى $ا ب ه$

من حيث أن $ع$ منتصف $ا ب$ $ك ا ع$ $م$ يوازي $ب ه$

(نظرية ٢٢)

$$\therefore م منتصف ا ه$$

وكذلك فى $ا ب ه$

من حيث أن $ص ك م$ منتصفا الضلعين $ا ك ا ه$

$$\therefore ص م يوازي ح ه$$

أى أن $ب م يوازي ه ه$

\therefore فالشكل $ب ه م$ متوازي الأضلاع

ومن حيث أن قطرى متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر

$$\therefore م منتصف ب ه$$

أى أن $ا س$ مستقيم متوسط للثلث

وعليه فالمستقيمت المتوسطة للثلث تتلاقى جميعا فى $م$ وهو المطلوب

تعريف — نقطة تلاقي المستقيمتين المتوسطة للثلث تسمى ملتقى المستقيمتين المتوسطة
نتيجة — ملتقى المستقيمتين المتوسطة في المثلث على ثلث كل منها من جهة القاعدة والثلثين
من جهة الرأس

لأنه يتعين في الشكل المتقدم أن

$$AM = AH$$

$$M \text{ من } SN \text{ نصف } M \text{ هـ}$$

$$M \text{ من } SN \text{ نصف } M \text{ أ}$$

$$M \text{ من } SN \text{ ثلث } A \text{ س}$$

$$M \text{ من } SN \text{ ثلث } B \text{ ص}$$

$$M \text{ من } SN \text{ ثلث } C \text{ ع}$$

من هذه النتيجة يتبين أن أصغر مستقيم متوسط في المثلث هو الذي ينصف أكبر أضلاعه
نتيجة — سيأتي البرهان على أن الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الأضلاع المقابلة لها
تتلاقى جميعاً في نقطة واحدة

دعاوى عملية متنوعة

(ينبغي البرهنة على كل مسألة من المسائل الآتية)

- ١ نقطة ما α ب γ مستقيم معلوم والمطلوب رسم مستقيمتين من α تصنع مع γ زوايا كل منها تساوى زاوية معلومة μ
ماعدد هذه المستقيمتين
- ٢ نصف الزاوية α م ب بدون استعمال الرأس μ أثناء العمل
- ٣ نقطة ما مفروضة داخل الزاوية α م ب والمطلوب رسم مستقيم ينتهى طرفاه بضلعى الزاوية على شرط أن تنصفه النقطة γ
- ٤ م α م β م γ ثلاث مستقيمتين متقاطعة فى μ والمطلوب رسم قاطع لها ينتهى طرفاه بالمستقيمين م α م β على شرط أن يمر م ب بمنتصفه
- ٥ المطلوب رسم مستقيم يمر بنقطة مفروضة مثل α ويكون جزؤه المحصور بين مستقيمين متوازيين معلومين يساوى طولاً معلوماً
- متى يكون لهذه المسألة حلان ومتى يكون لها حل واحد ومتى يستحيل
- ٦ المطلوب رسم معين داخل المثلث α ب γ بحيث تكون احدى زواياه منطبقة على الزاوية α
- ٧ استعمل خواص المثلث المتساوى الأضلاع فى تقسيم مستقيم معلوم الى ثلاثة اقسام متساوية

(إنشاء المثلثات)

- ٨ المطلوب إنشاء المثلث اذا علم منه
(أولاً) نقط متصفات اضلاعه الثلاثة
(ثانياً) طول ضلعين (كل على حدته) والمستقيم المتوسط الذى ينصف الثالث
(ثالثاً) طول أحد الأضلاع وكل من المستقيمين المتوسطين المنصفين للضلعين الآخرين
(رابعاً) طول كل من المستقيمتين المتوسطتين الثلاثة

الجزء الثاني

—

الجزء الثاني

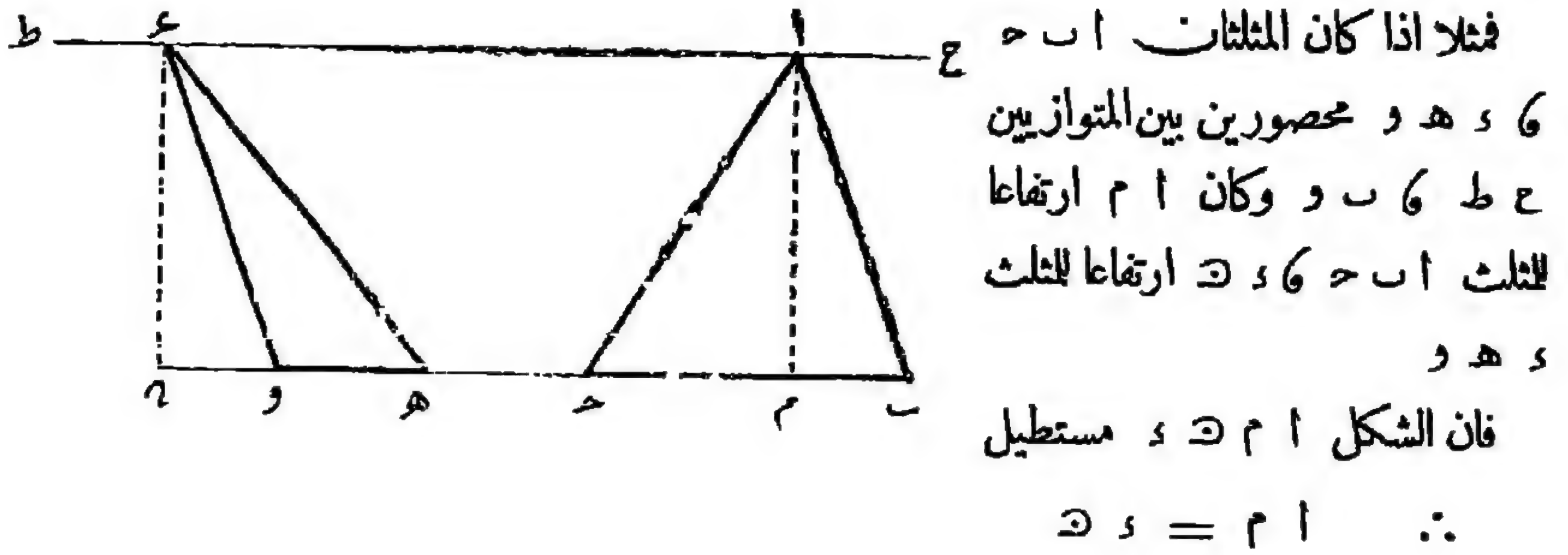
في المساحات

تعريف

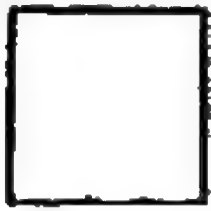
١ ارتفاع متوازي الاضلاع هو العمود الذي يقاس به البعد بين أحد اضلاعه المعتبر قاعدة والضلع المقابل له

٢ ارتفاع المثلث هو العمود الذي يقاس به البعد بين أحد رؤوسه والضلع المقابل له المعتبر قاعدة للمثلث

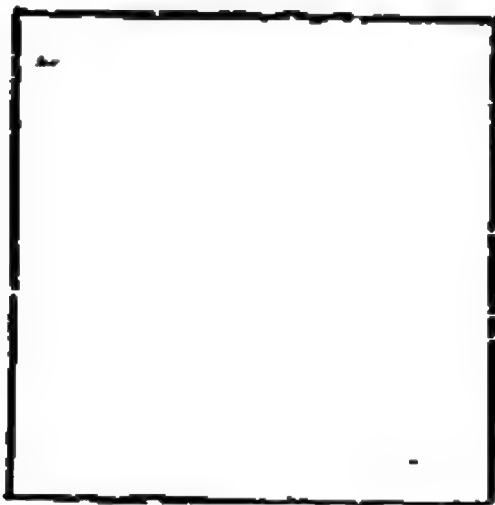
تنبيه - يؤخذ من هذا أن متوازيات الأضلاع أو المثلثات المحصورة بين مستقيمين متوازيين تتساوى ارتفاعاتها



سنتيمتر مربع



بوصة مربعة



٣ مساحة الشكل هي مقدار ما تحيط به أضلاعه من السطح

٤ السنتيمتر المربع هو مساحة المربع الذي طول ضلعه سنتيمتر

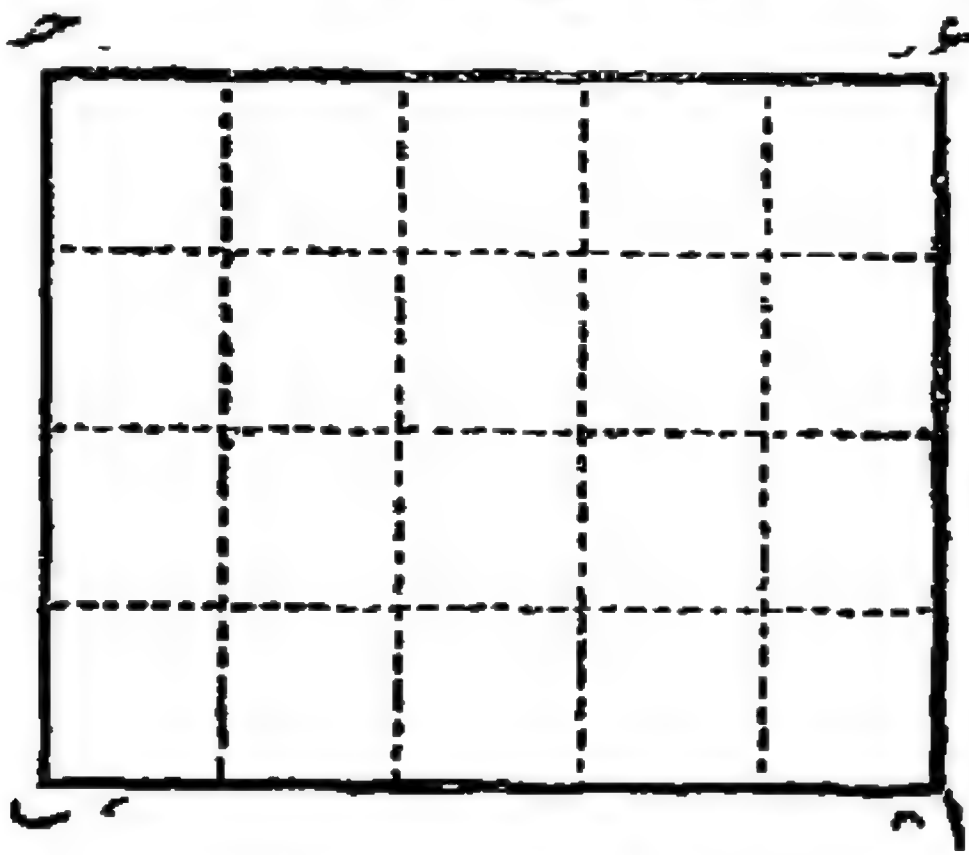
٥ البوصة المربعة هي مساحة المربع الذي طول ضلعه بوصة

وقس على ذلك المتر المربع والياردة المربعة والقدم المربع

٦ وعلى ذلك فوحدة السطوح هي مساحة مربع طول ضلعه وحدة الأطوال

نظرية ٢٣

مساحة المستطيل — إذا ضربنا عدد الوحدات الدالة على طول قاعدة مستطيل في عدد الوحدات الدالة على طول ارتفاعه فإن حاصل الضرب يدل على عدد الوحدات المربعة التي تتكون منها مساحة الشكل



إذا فرضنا أن a و b مستطيل طول قاعدته a و b سنتيمترات وطول ارتفاعه d و e سنتيمترات

فانه يطلب إثبات أن مساحة المستطيل a و b و d و e من السنتيمترات المربعة لذلك نقسم a إلى e أقسام متساوية a/e إلى d من هذه الأقسام ونرسم من نقط تقسيم كل منهما مستقيمتين توازي الأخر فبذلك ينقسم المستطيل إلى أقسام كل منها سنتيمتر مربع ومن حيث أن الشكل يحتوي على e صفوف أفقيه في كل منها e مربعات \therefore يحتوي المستطيل على $e \times d$ من السنتيمترات المربعة

فإذا جعلنا a رمزاً لعدد الوحدات الطولية الدالة على طول القاعدة b و d رمزاً لعدد الوحدات الطولية الدالة على طول الارتفاع فإن المستطيل يحتوي على $e \times d$ من مربعات هذه الوحدات وإذا كانت d تدل على عدد وحدات طول ضلع مربع فإن المربع يحتوي على d^2 من مربعات هذه الوحدات وعلى ذلك تكون

مساحة المستطيل = حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع ... (١)

ومساحة المربع = مربع ضلعه ... (٢) وهو المطلوب

نتيجة ١ — المستطيلات المتساوية في القاعدة والارتفاع متكافئة أي أنها متساوية في المساحة

نتيجة ٢ — المستطيلات المتكافئة ذات القواعد المتساوية تكون ارتفاعاتها متساوية

تنبيه — يكفي لتعيين المستطيل أن يعلم ضلعا المتجاوران فانهما يعينان مساحته وشكله وإذا

كان a و b ضلعين متجاورين في مستطيل ما مثل a و b فإن حاصل الضرب $a \times b$ يدل على هذا المستطيل

وكذلك إذا كان a أحد أضلاع مربع ما مثل a و d فإن المقدار a^2 يدل على هذا المربع

تمارين على الأطوال والمساحات

١ ارسم شكلا يبين أن

(أولاً) السنتيمتر المربع = ١٠ من المليمترات المربعة

(ثانياً) الياردة المربعة = ٣ من الأقدام المربعة

(ثالثاً) القدم المربع = ١٢ من البوصات المربعة

٢ ارسم شكلا يبين أن المربع المرسوم على أى مستقيم يساوى أربعة أمثال المربع المرسوم على نصف هذا المستقيم

٣ إذا كان السنتيمتر فى الرسم يدل على ٥ كيلومترات فما هى المساحة التى تدل عليها ٦ سنتيمترات مربعة

ثمة لنظرية ٢٣

قد استعملنا فى البرهان على نظرية ٢٣ أعداداً صحيحة لقاعدة المستطيل وارتفاعه واستنتجنا القانون المتقدم

وهذا القانون عام للأعداد الصحيحة والكسرية على السواء فمثلاً

إذا فرضنا أن قاعدة مستطيل تساوى ٣,٢ من السنتيمترات وارتفاعه يساوى ٢,٤ من السنتيمترات

فإن مساحة المستطيل = $(٣,٢ \times ٢,٤)$ من السنتيمترات المربعة

لأن القاعدة = ٣,٢ من السنتيمترات = ٣٢ مليمتر

والارتفاع = ٢,٤ من السنتيمترات = ٢٤ مليمتر

∴ المساحة = (٣٢×٢٤) من المليمترات المربعة

= $\frac{٢٤ \times ٣٢}{١٠}$ من السنتيمترات المربعة

= $(٣,٢ \times ٢,٤)$ من السنتيمترات المربعة

تمارين على مساحة المستطيل والمربع

ارسم على ورق المربعات مستطيلات بمقدار القاعدة n لكل منها معلوم كما سيأتى وكذلك مقدار الارتفاع e ثم اوجد مساحة كل بالحساب وعد المربعات المحصورة بين أضلاعه على الورق للتحقق من النتيجة الحسابية

١	٥ = ٧	سنتيمترات	٦ = ٤	سنتيمترات
٢	١,٥ = ٧	من السنتيمترات	٦ = ٤	»
٣	٠,٨ = ٧	»	٦ = ٤	من السنتيمترات
٤	٢,٥ = ٧	»	٦ = ٤	»
٥	٢,٢ = ٧	»	٦ = ٤	»
٦	١,٦ = ٧	»	٦ = ٤	»

أوجد بالحساب مساحة كل من المستطيلات التي أبعادها كما يأتي

٧	١٨ = ٧	مترا	٦ = ٤	١١ مترا
٨	٤ = ٧	ديسمترات	٦ = ٤	٨٢ سنتيمترا
٩	٢,٥ = ٧	من الكيلومترات	٦ = ٤	٤ أمتار
١٠	١ = ٧	كيلومتر	٦ = ٤	١ سنتيمترا

١١ المطلوب إيجاد ارتفاع المستطيل الذي مساحته ٣٠ سنتيمترا مربعا وقاعدته ٦ سنتيمترات وتحقيق الناتج الحسابي برسم هذا المستطيل على ورق المربعات وعدّ مافيه من المربعات

١٢ المطلوب حساب قاعدة مستطيل مساحته ٣,٩ من السنتيمترات المربعة وارتفاعه ١,٥ من السنتيمترات وتحقيق الناتج الحسابي برسم هذا المستطيل على ورق المربعات وعدّ مافيه من المربعات

١٣ (أولاً) كم مرة تكرر مساحة مستطيل اذا ضوعفت قاعدته ثلاث مرات ولم يتغير مقدار ارتفاعه (ثانياً) كم مرة تكرر مساحة مستطيل اذا ضوعف كل من قاعدته وارتفاعه ثلاث مرات ارسم شكلاً يبين ذلك في كل حالة واذا كرر قانوناً عاماً تستنتجه لذلك

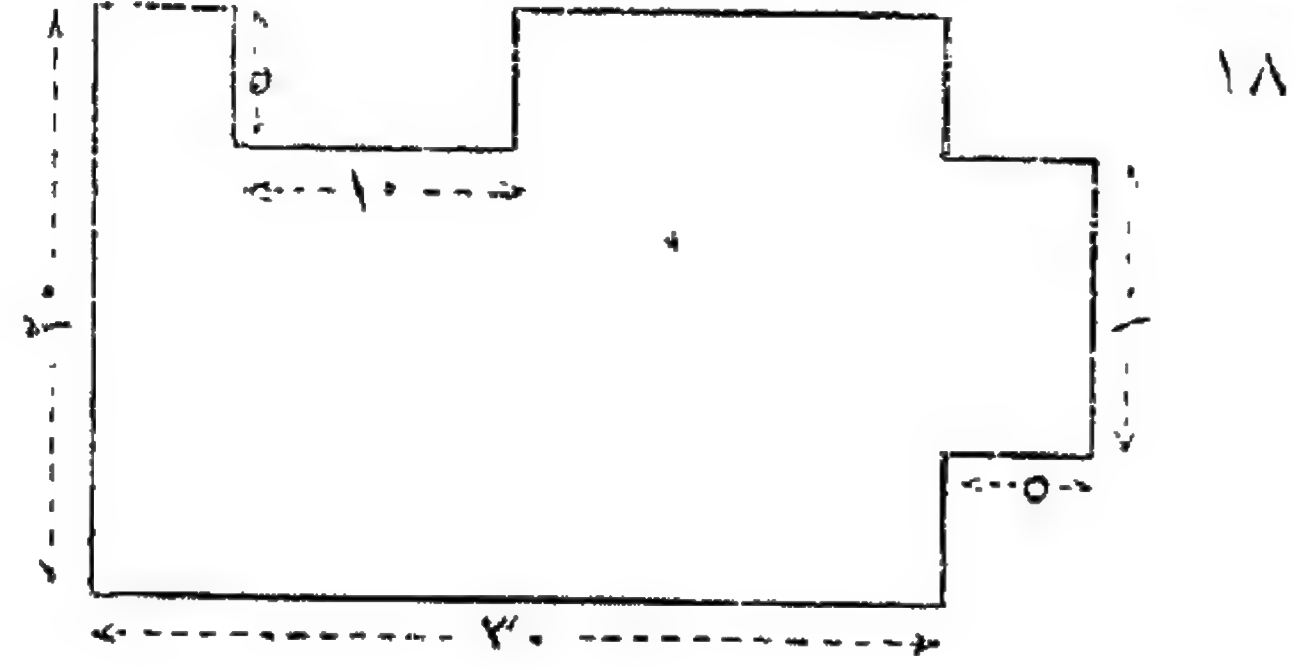
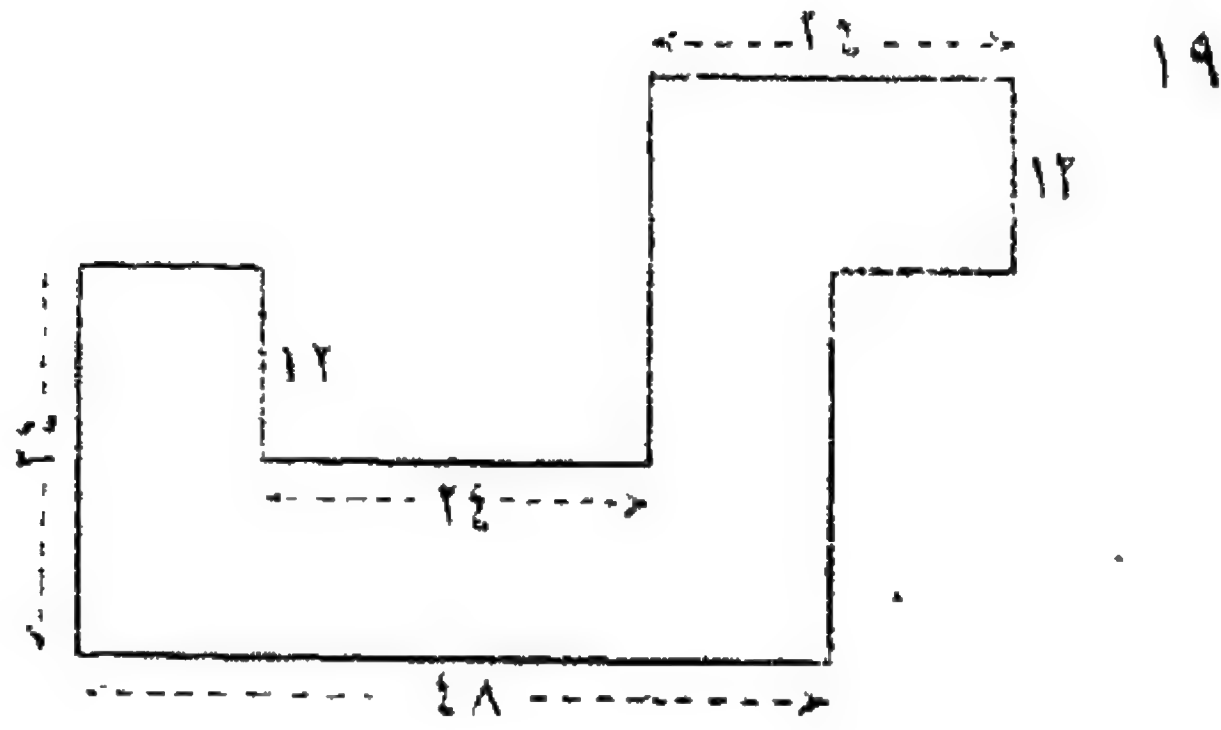
١٤ حذيفة على شكل مستطيل قاعدته في الرسم تساوي ٣,٦ من السنتيمترات وارتفاعه ٢,٥ من السنتيمترات فما مساحته اذا كان مقياس الرسم سنتيمترا لكل ١٠ أمتار وان زادت مساحة الحذيفة ٣٠٠ متر مربع فما طولها اذا لم يتغير العرض وكم سنتيمترا تدل على هذا الطول في الرسم

١٥ ما مساحة حوش على شكل مستطيل قاعدته في الرسم ٦,٥ من السنتيمترات وارتفاعه ٤,٥ من السنتيمترات (ومقياس الرسم ١ سنتيمتر لكل ٢٠ مترا)

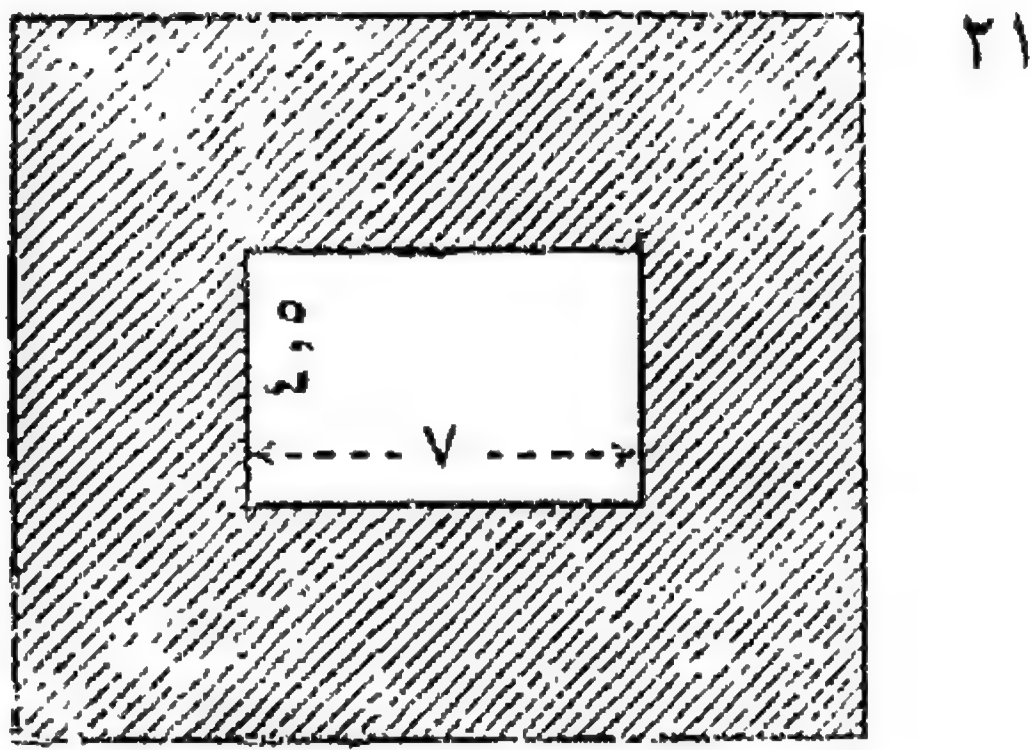
١٦ رسم مستطيل مساحته ١٤٤٠ مترا مربعا فكانت قاعدته في الرسم ٤,٥ من السنتيمترات وارتفاعه ٣,٢ من السنتيمترات ما مقياس الرسم

١٧ مزرعة على شكل مستطيل مساحتها ٥٢٠٠٠ قدم مربع رسمت بمقياس سنتيمتر واحد لكل ١٠٠ قدم فاذا كانت قاعدة المستطيل تساوي ٣,٢٥ من السنتيمترات فما طول ارتفاعه

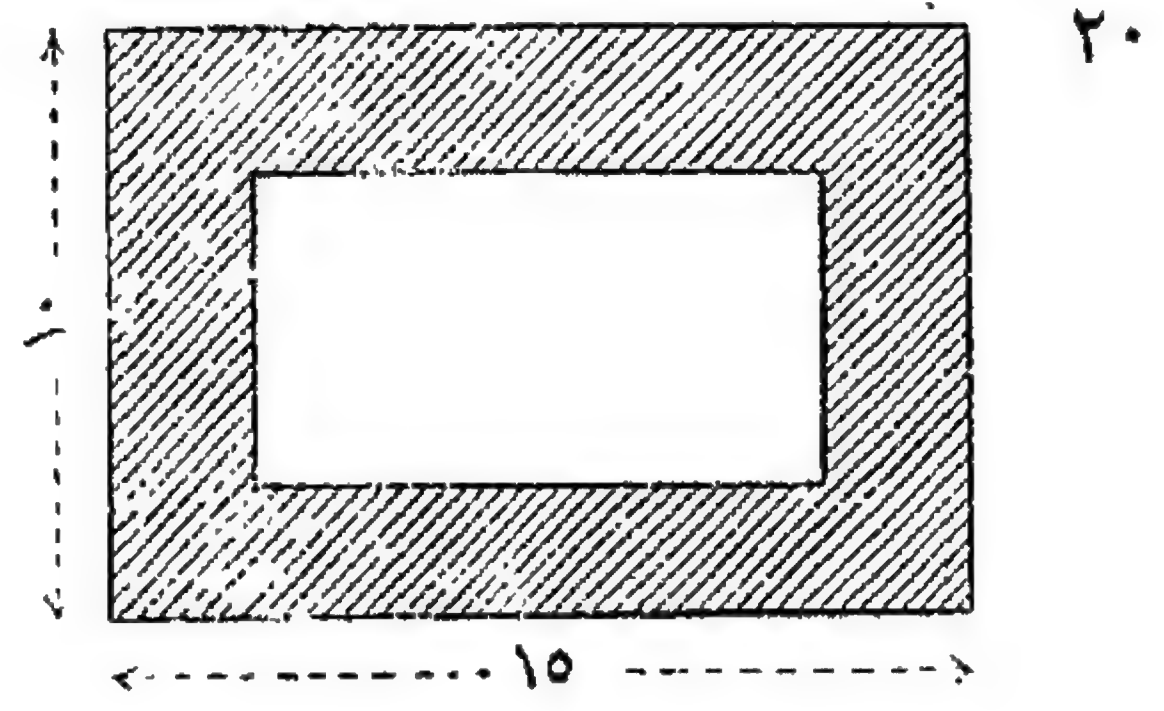
المطلوب حساب مساحة قطع الأرض الآتية أشكالها مع العلم بأن جميع زواياها قوائم وقياس أبعادها بالأمتار



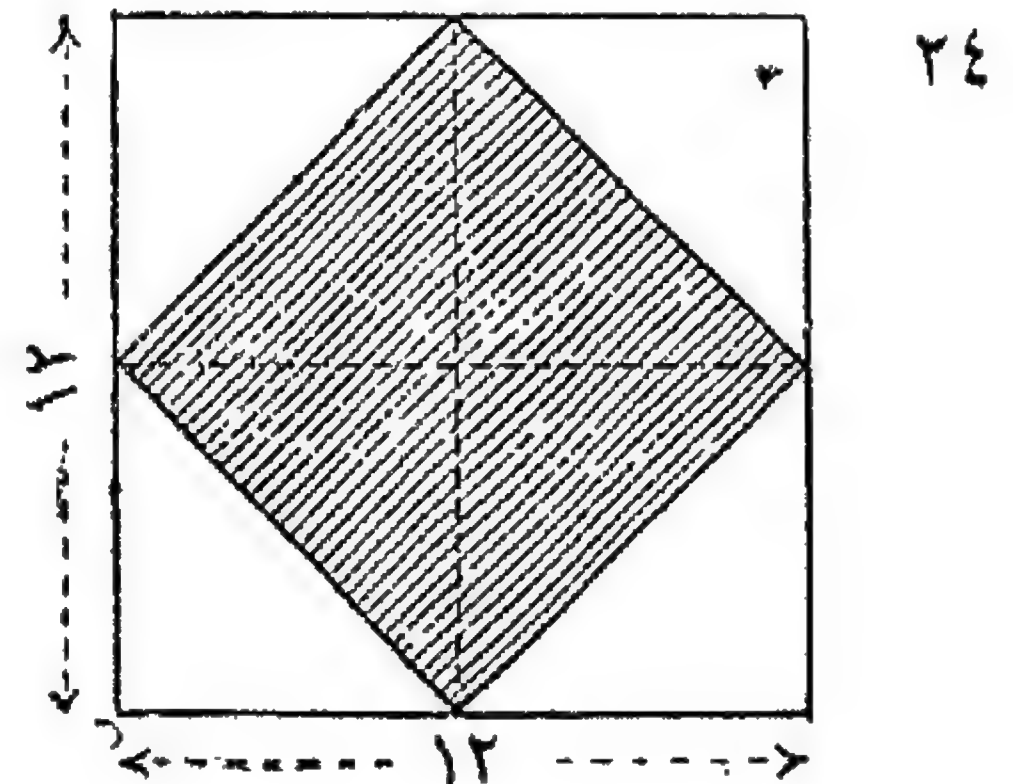
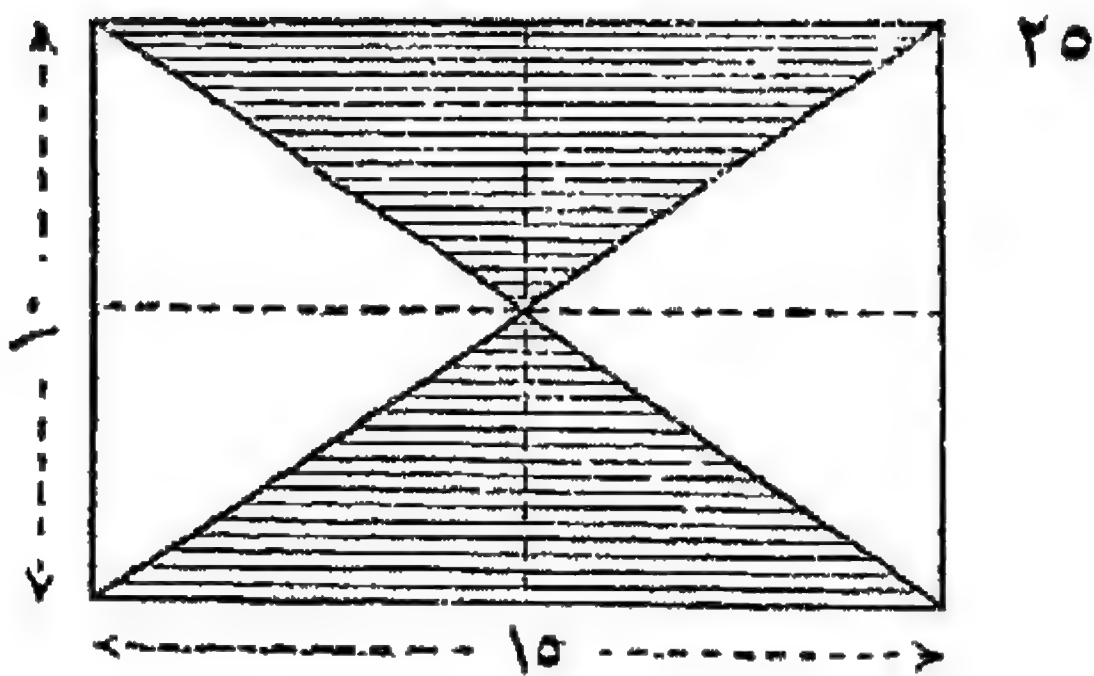
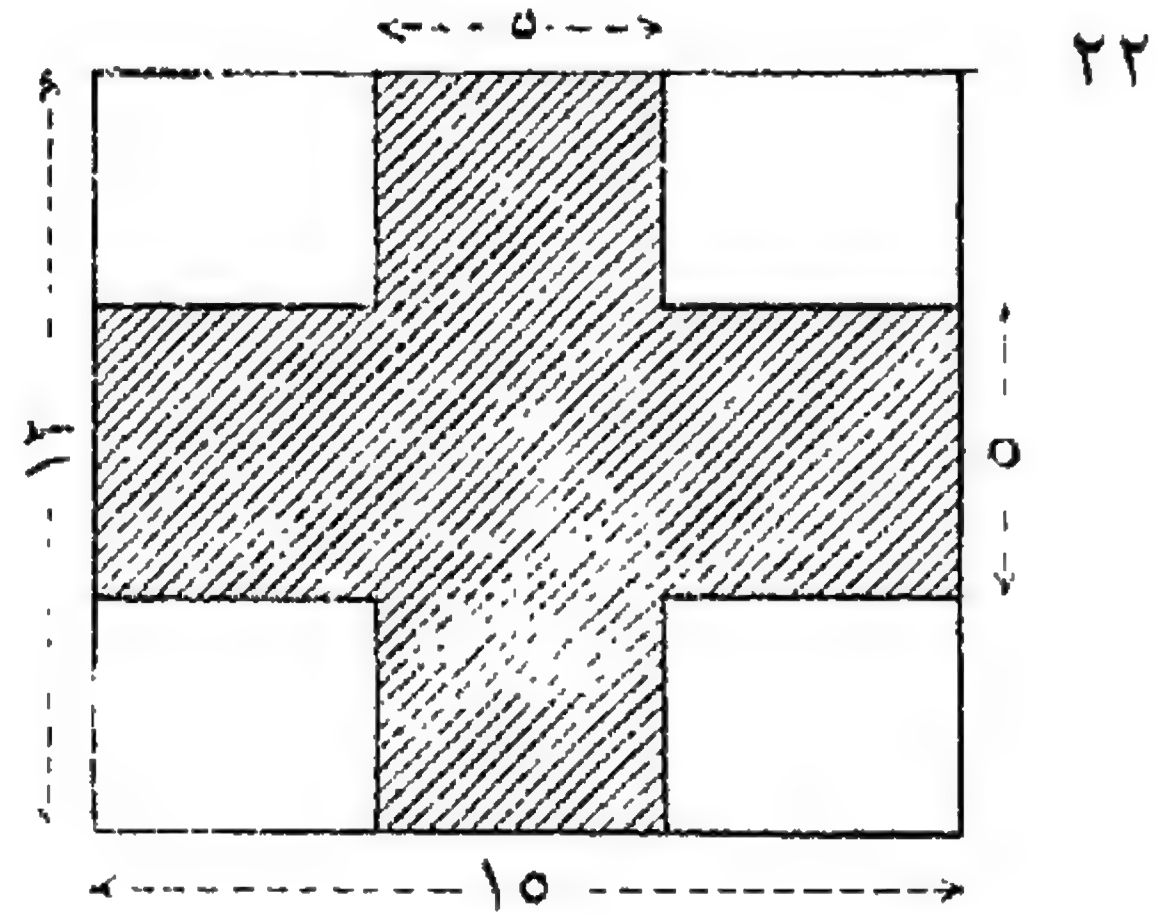
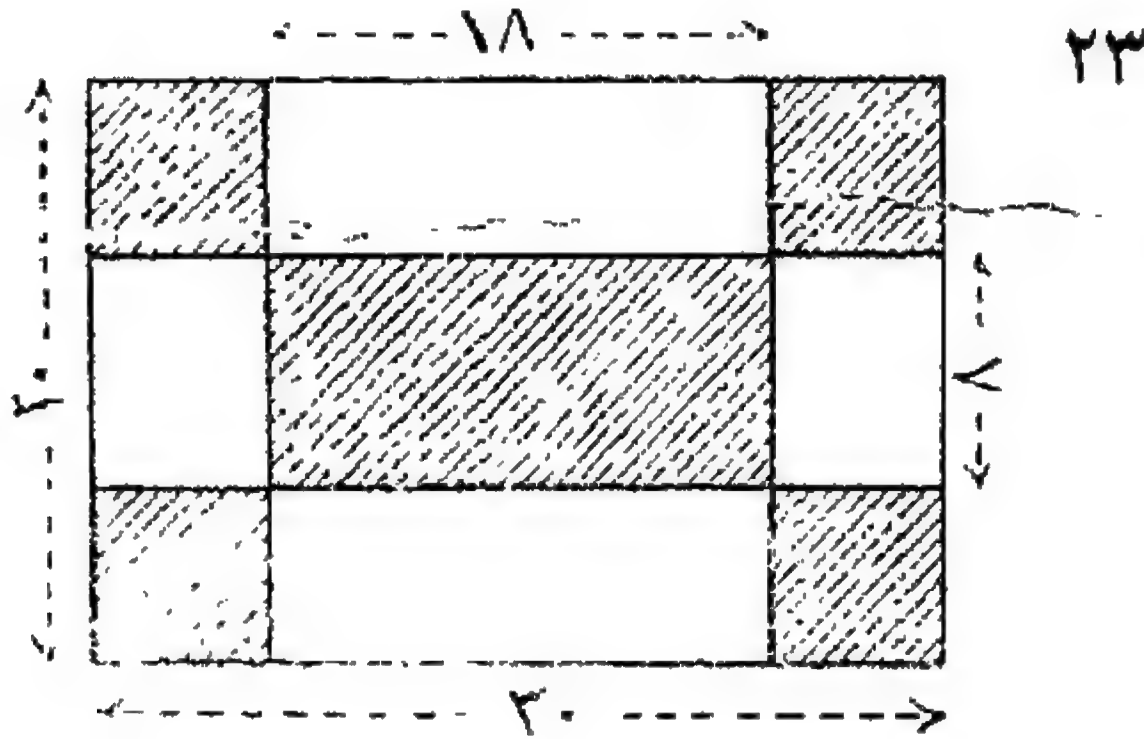
المطلوب حساب مساحة الجزء المظلل في كل من الأشكال الآتية مع العلم بأن قياس أبعادها بالأمتار



عرض الجزء المظلل ٤ أمتار

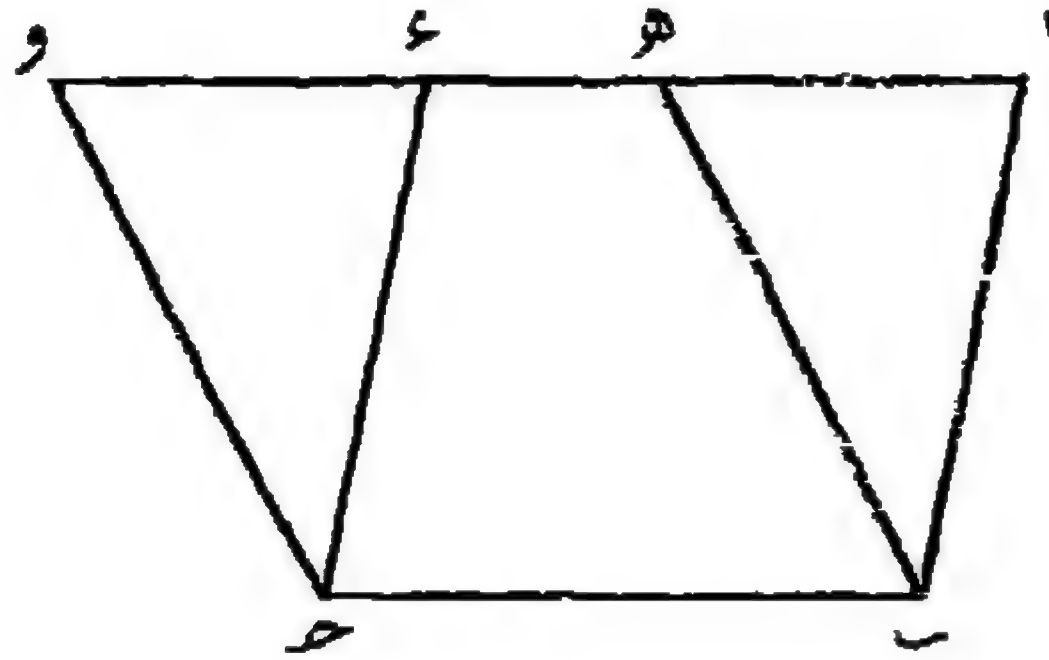


عرض الجزء المظلل ٢,٥ من الأمتار



نظرية ٢٤

متوازي الأضلاع المتحدان في القاعدة والمحصوران بين مستقيمين متوازيين متكافئان



نفرض أن $ا ب ح د$ و $ا هـ ب د$ شكلان متوازي الأضلاع متحدان في القاعدة $ب د$ ومحصوران بين المتوازيين $ا د$ و $ا هـ$

ويطلب البرهنة على أن $ا ب ح د = ا هـ ب د$ في المساحة

البرهان — في المثلثين $ا هـ ب$ و $ا د ب$

$$\left. \begin{array}{l} (نظرية ٢١) \\ (بالتناظر نظرية ١٤) \end{array} \right\} \begin{array}{l} ا هـ ب = ا د ب \\ ا هـ ب د = ا د ب د \\ ا هـ ب د = ا ب د د \end{array}$$

من حيث أن

$$\therefore ا هـ ب د = ا هـ ب د = ا هـ ب د$$

وعليه فلو طرحنا $ا هـ ب د$ من الشكل الكلي $ا ب ح د$ و لكن الباقي متوازي الأضلاع $هـ ب د$ و

ولو طرحنا $ا هـ ب د$ من الشكل الكلي $ا ب ح د$ و لكن الباقي متوازي الأضلاع $ا ب د$ و

هذان الباقيان متساويان \therefore

أي أن متوازي الأضلاع $ا ب ح د = متوازي الأضلاع هـ ب د$ وهو المطلوب

تمرين

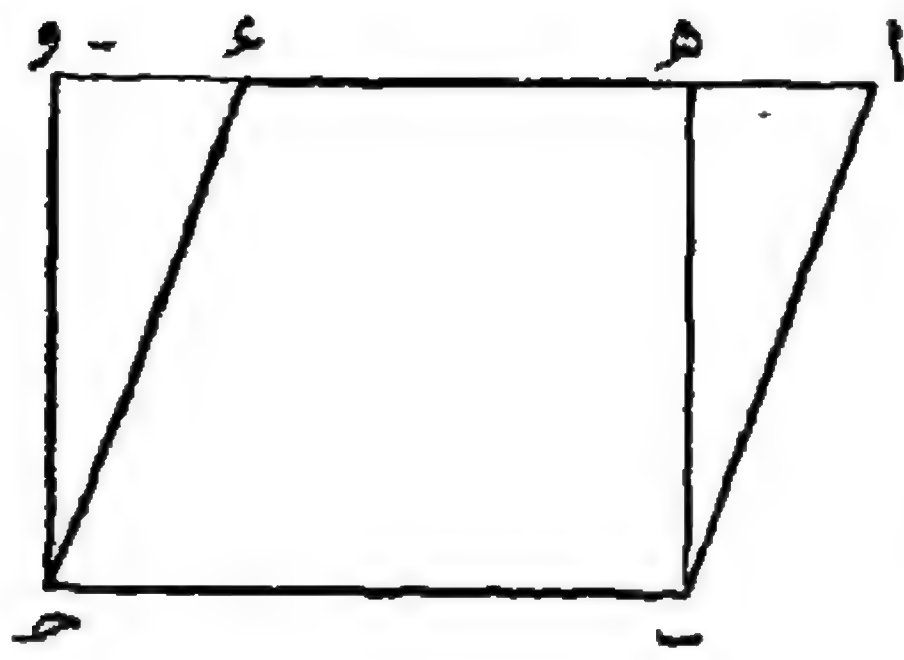
المطلوب اثبات هذه النظرية في حالة ما اذا كان الضلعان $ا د$ و $هـ د$ ليس بينهما جزء مشترك

(راجع الشكل) وذلك

(أولاً) بأن وقعت النقطة $هـ$ على النقطة $د$

(ثانياً) بأن وقعت النقطة $هـ$ على امتداد $ا د$

مساحة متوازي الأضلاع



ليكن $ا ب ح د$ شكلا متوازي الأضلاع $و هـ ب ح د$
 مستطिला قاعدة كل منهما $ب ح$ وارتفاعه $هـ ب$
 فعلى نظرية ٢٤ تكون

مساحة متوازي الأضلاع $ا ب ح د =$ مساحة المستطيل
 $هـ ب ح د$

$$= ب ح \times ب هـ$$

$$= \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

نتيجة — من حيث ان مساحة متوازي الأضلاع لا ترتبط إلا بقاعدته وارتفاعه فتوازيات الأضلاع
 ذوات القواعد المتساوية والارتفاعات المتساوية متكافئة

تمارين

(عددية وتخطيطية)

١ ماساحة متوازي الأضلاع اذا كانت

(أولاً) قاعدته = ٥,٥ من السنتيمترات وارتفاعه = ٤ سنتيمترات

(ثانياً) قاعدته = ٢,٤ من الأمتار وارتفاعه = ١,٥ من الأمتار

٢ ارسم متوازي الأضلاع $ABCD$ مع العلم بأن $AB = ٦$ سنتيمترات $AD = ٤$ سنتيمترات $\angle D = ٦٥^\circ$ ثم انزل من نقطة D عموداً على AB وقسّه واحسب مساحة متوازي الأضلاع من ذلك بالتقريب وبين لم تكون هذه المساحة تقريبية

ثم انزل من نقطة B عموداً على AD وقسّه واحسب مساحة الشكل من حاصل ضرب طول هذا العمود في طول AD ثم أوجد متوسط المساحتين الناتجتين

٣ شكل متوازي الأضلاع طول أحد ضلعيه المتجاورين ٣٠ متراً وطول الآخر ٢٥ متراً والزاوية المحصورة بينهما تساوي ٥٠° والمطلوب وضع رسم مقياسه سنتيمتر لكل ٥ أمتار ثم حساب ناتجيهن لمساحة الشكل بواسطة قياس ارتفاعيه كل على حدته وأخذ متوسط هذين الناتجين

٤ $ABCD$ شكل متوازي الأضلاع مساحته $٢٦,٦$ من السنتيمترات المربعة وطول قاعدته AB يساوي ٧ سنتيمترات والمطلوب معرفة طول ارتفاعه

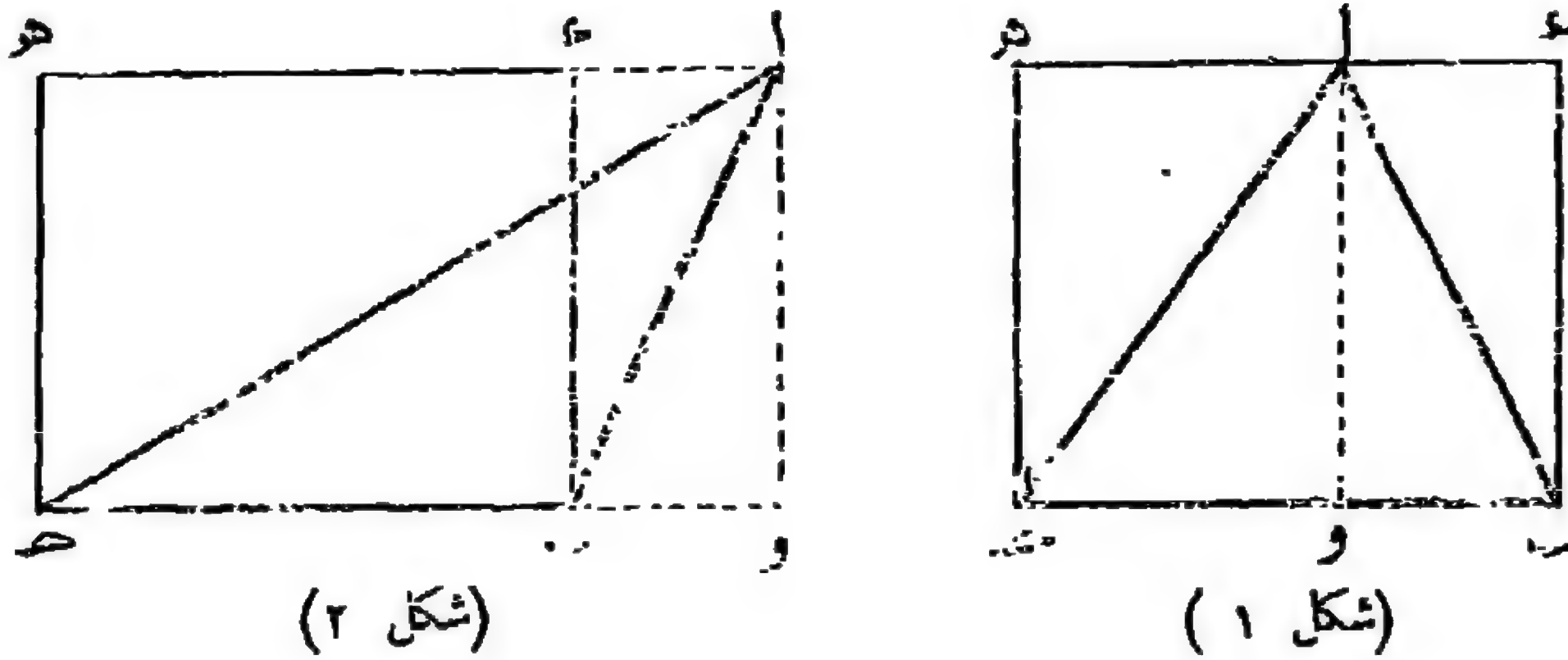
ارسم متوازي الأضلاع المذكور على فرض أن $AD = ٥$ سنتيمترات

٥ معين مساحته ٢٤ سنتيمترا مربعا وطول أحد أضلاعه ٥ سنتيمترات ماهو ارتفاعه .

ارسم المعين المذكور وقس إحدى زاويتييه الحادتين

نظرية ٢٥

مساحة المثلث - مساحة المثلث تساوي نصف مساحة المستطيل المتحد معه في القاعدة والارتفاع



المثلث $أ ب ح$ متحد مع المستطيل $د ب ح$ في القاعدة $ب ح$ والارتفاع $أ و$
وتطلب البرهنة على أن $\Delta أ ب ح$ يكافئ نصف المستطيل $د ب ح$ هـ

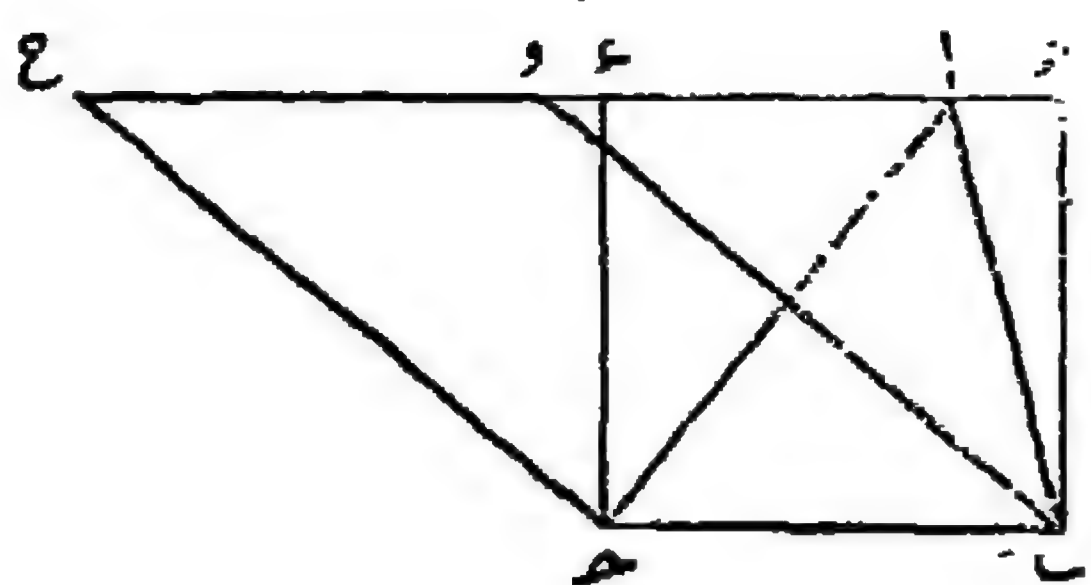
البرهان - من حيث أن $أ و$ عمود على $ب ح$ فكل من الشكليين هـ و $و$ مستطيل
ومن حيث أن القطر $أ ح$ يقسم المستطيل هـ و إلى قسمين متساويين

$$\therefore \Delta أ و ح = \text{نصف المستطيل هـ و}$$

$$\text{وكذلك } \Delta أ و ب = \text{نصف المستطيل د و}$$

وبالجمع في شكل ١ والطرح في شكل ٢ يحدث أن

$$\Delta أ ب ح = \text{نصف المستطيل د ب ح هـ} \quad \text{وهو المطلوب}$$



نتيجة - المثلث نصف متوازي الأضلاع المتحد معه
في القاعدة والمحصور معه بين متوازيين

$$\text{لأن المثلث } أ ب ح = \text{نصف المستطيل د ب ح هـ}$$

$$\text{وهذا المستطيل} = \text{متوازي الأضلاع د ب ح ع و}$$

لأنهما متحدان في القاعدة والارتفاع

$$\therefore \Delta أ ب ح = \text{نصف متوازي الأضلاع د ب ح ع و}$$

مساحة المثلث

إذا دل الرمز u على طول الضلع AB والرمز e على طول الارتفاع h و (شكل ١ ٢٦)
 بوحدة ما من وحدات الأطوال فإن مساحة المستطيل $AB \times h = e \times u$ من مربعات هذه الوحدة
 \therefore مساحة المثلث $AB \times \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} e \times u$ من هذه الوحدات المربعة
 أى أن مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \text{ القاعدة } \times \text{ الارتفاع}$

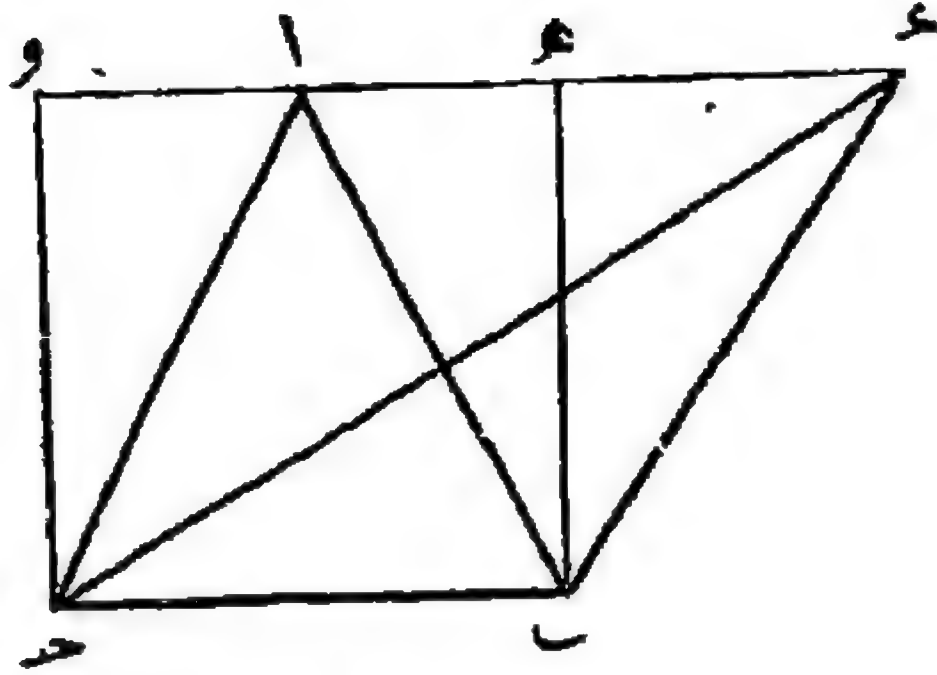
تمارين على مساحة المثلث

(عددية وتخطيطية)

- ١ ماساحة المثلث في كل من الحالات الآتية :
 (أولاً) القاعدة $= 24$ متراً والارتفاع $= 15$ متراً
 (ثانياً) القاعدة $= 4,8$ من السنتيمترات والارتفاع $= 3,5$ من السنتيمترات
 (ثالثاً) القاعدة $= 160$ متراً والارتفاع $= 125$ متراً
- ٢ المطلوب رسم المثلث ABC في كل من الحالات الآتية :
 (أولاً) الضلع $A = 8,4$ من السنتيمترات $B = 6,8$ من السنتيمترات $C = 4$ سنتيمترات
 (ثانياً) الضلع $B = 5$ سنتيمترات $C = 6,8$ من السنتيمترات $A = 1,1$
 (ثالثاً) الضلع $A = 6,5$ من السنتيمترات $B = 5,2$ $C = 6,1$
 ثم رسم ارتفاع كل مثلث بالنسبة إلى ضلع فيه يعتبر قاعدة وحساب مساحة المثلث بالتقريب بعد قياس الارتفاع
- ٣ ABC مثلث قائم الزاوية في C والمطلوب بيان أن مساحة المثلث تساوي $\frac{1}{2} AB \times h$ وحساب هذه المساحة إذا كان $A = 6$ سنتيمترات $B = 5$ سنتيمترات
 ارسم المثلث بهذه الأبعاد وقس الوتر AB ثم انزل عليه عموداً من C وقس وبذلك أوجد مساحة المثلث على وجه التقريب ثم بين مقدار الخطأ ونسبته في المائة إلى المساحة الحقيقية
- ٤ المطلوب إعادة إجراء ما في المسألة السابقة إذا كان $A = 5,6$ من السنتيمترات $B = 9$ سنتيمترات مع العلم بأن الزاوية القائمة هي C
- ٥ ما طول ارتفاع مثلث مساحته 500 سنتيمتر مربع وطول قاعدته 50 سنتيمتراً وما طول القاعدة إذا كانت مساحة المثلث المذكور $10,4$ من السنتيمترات المربعة وارتفاعه $1,6$ من السنتيمترات
- ٦ ارسم المثلث ABC الذي طول ضلعه $A = 7,5$ من السنتيمترات $B = 7$ سنتيمترات $C = 6,5$ من السنتيمترات وانزل من A عموداً على B ثم قس وبذلك أوجد مساحة المثلث بالتقريب

نظرية ٢٦

المثلثات المتحدة في القاعدة ورؤوسها على مستقيم مواز لها متكافئة



الفرض — $AB \parallel A'B'$ $BC \parallel B'C'$ مثلثان متحدان في القاعدة BC ورأساهما A A' على المستقيم AA' الموازي BC

والمطلوب اثبات أن $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C$ يكافئ $BC \parallel B'C'$

البرهان — إذا كان $BC \parallel B'C'$ مستطيلا متحدا مع المثلثين ABC $A'B'C$ في القاعدة BC ومحصورا معهما بين متوازيين

يكون $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C$ نصف المستطيل $BC \parallel B'C'$ وهـ (نظرية ٢٥)

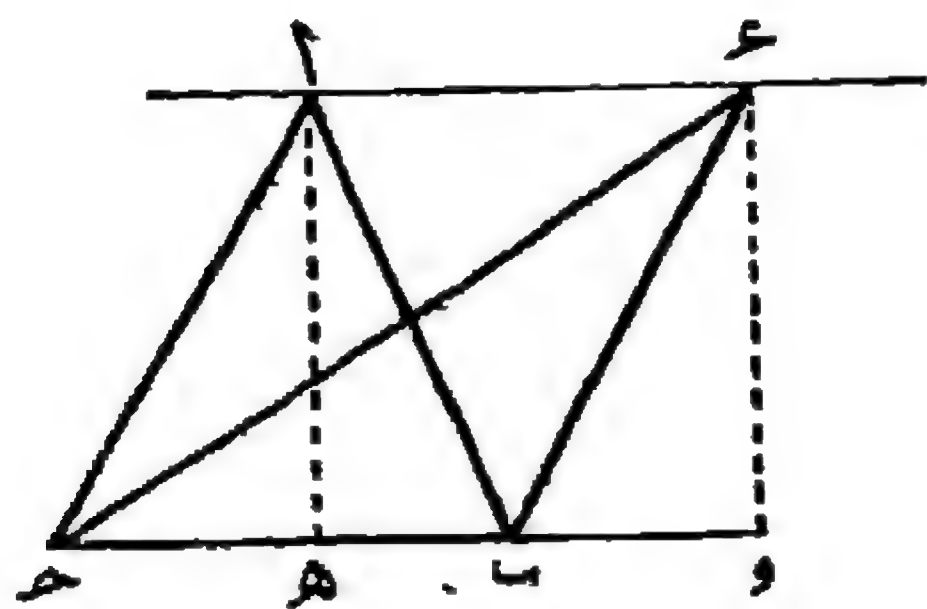
وكذلك $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C$ نصف المستطيل $BC \parallel B'C'$ وهـ

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C$ يكافئ $BC \parallel B'C'$ وهو المطلوب

وعلى ذلك فالمثلثات ذوات القواعد المتساوية والارتفاعات المتساوية متكافئة

نظرية ٢٧

المثلثات المتكافئة المتحدة في القاعدة والمرسومة في جهة واحدة منها تكون رؤوسها على مستقيم يوازي تلك القاعدة



الفرض — $AB \parallel A'B'$ $BC \parallel B'C'$ مثلثان متكافئان مرسومان على قاعدة واحدة BC وفي جهة واحدة منها A A' وهـ AA' ارتفاعاهما

والمطلوب اثبات أن $AA' \parallel BC$ متوازيان

البرهان — $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C$ يكافئ نصف المستطيل الذي بعده AA' وهـ

وكذلك $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C$ يكافئ نصف المستطيل الذي بعده AA' وهـ

\therefore المستطيل الذي بعده AA' = المستطيل الذي بعده AA' وهـ $AA' \parallel BC$

$\therefore AA' \parallel BC$ (نظرية ٢٣ نتيجة ٢)

ولكن $AA' \parallel BC$ يوازي BC

$\therefore AA' \parallel BC$ وهـ أي يوازي BC وهو المطلوب

تمارين على مساحة المثلث

(مسائل نظرية)

١ ABC مثلث والمستقيم SS يوازي القاعدة BC ويقطع AB في S و AC في V برهن على أنه إذا وصل B ص K CS فتقاطعا في D يحدث(أولا) أن $AD = DS$ $BC = CK$ يكافئ $AD = DS$ $BC = CK$ (ثانيا) أن $AD = DS$ $BC = CK$ يكافئ $AD = DS$ $BC = CK$ (ثالثا) أن $AD = DS$ $BC = CK$ يكافئ $AD = DS$ $BC = CK$ (رابعا) أن $AD = DS$ $BC = CK$ يكافئ $AD = DS$ $BC = CK$

٢ برهن على أن المستقيم المتوسط للمثلث يقسمه الى مثلثين متكافئين وارسم مستقيمتين من رأس المثلث تقسمه الى ثلاثة أجزاء متكافئة

٣ برهن على أن قطري متوازي الأضلاع يقسمانه الى أربعة مثلثات متكافئة

٤ ABC مثلث والنقطة D منتصف قاعدته BC برهن على أنه إذا فرضت نقطة ما مثل E على المستقيم المتوسط AD ثم وصل منها الى B و C كان $AD = DE$ يكافئ $AD = DE$
٥ ABC متوازي الأضلاع انزل من B و C العمودان BS و CS على قطره AC برهن على أن $BS = CS$ وعلى ذلك إذا فرضت نقطة مثل E على القطر AC أو على امتداده فثبتت(أولا) أن $AD = DE$ $AD = DE$ يكافئ $AD = DE$ (ثانيا) $AD = DE$ $AD = DE$ يكافئ $AD = DE$

٦ المطلوب اثبات أن المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث وذلك بواسطة نظريتي ٢٦ و ٢٧

٧ المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين شبه المنحرف غير المتوازيين يوازي قاعدتيه المتوازيتين

٨ ABC شكل متوازي الأضلاع والنقطة S منتصف AC والنقطة V منتصف BC برهن على أنه إذا أخذت النقطة E على VS أو على امتداده ووصل منها الى A و B كان $AE = BV$ رجع متوازي الأضلاع المذكور٩ ABC شكل متوازي الأضلاع K نقطة ما على AC و V على BC برهن على أن $AK = BV$ $AK = BV$ يكافئ $AK = BV$ ١٠ ABC شكل متوازي الأضلاع K نقطة مفروضة داخله برهن على أن مجموع مساحتي المثلثين AKB و BVC يساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع

تمارين على مساحة المثلث

(عددية وتخطيطية)

- ١ مزرعة على شكل مثلث أضلاعه ٣٧٠ مترا ٦ ٢٠٠ مترا ٦ ١٩٠ مترا والمطلوب وضع رسم مقياسه سنتيمتر لكل ٥٠ مترا وحساب مساحة المزرعة بالتقريب وذلك بانزال أحد ارتفاعات المثلث وقياسه
- ٢ حوش على شكل مثلث طول ضلعين منه ١٢٤ مترا ٦ ١٤٤ مترا والزاوية المحصورة بينهما تساوي ٤٥° والمطلوب وضع رسم مقياسه سنتيمتر لكل ٢٠ مترا وحساب مساحة الحوش بالتقريب بعد قياس ما هو لازم لاستخراجها
- ٣ ا ب ح مثلث مساحته ٦,٦ من السنتيمترات المربعة وطول قاعدته ب ح ٥,٥ من السنتيمترات والمطلوب إيجاد ارتفاعه وتعيين المحل الهندسي للرأس ا ثم رسم المثلث مع العلم بأن $a = 2,6$ من السنتيمترات وقياس ا ب
- ٤ ا ب ح مثلث مساحته ١٨,٩ من السنتيمترات المربعة والضلع ا' $= ٧$ سنتيمترات ما طول ارتفاعه أوجد المحل الهندسي للرأس ا وارسم المثلث مع العلم بأن $d = ٦٨$ ° ثم قس الضلع ب ب'
- ٥ ا ب ح مثلث طول كل من ضلعيه ب ح ٦ ا ثابت وليكن الأول ٦ سنتيمترات والثاني ٥ سنتيمترات فاذا فرض أن الضلع ب ا يدور حول نقطة ب وأن ب ح ثابت لا يتحرك ما هي التغيرات في مساحة المثلثات الحادثة
- لتكن الاجابة على هذه المسألة برسم عدة مثلثات تزداد فيها د ب على التوالي بقدر ٣٠° من الصفر الى ١٨٠° ثم إيجاد مساحة كل مثلث ووضع النتائج في صورة جدول

(مسائل نظرية)

- ٦ اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول تكمل الزاوية المحصورة بين نظيريهما في الثاني كان المثلثان متكافئين هل يمكن أن ينطبق مثل هذين المثلثين كل على الآخر تماما
- ٧ المطلوب رسم مثلث متساوي الساقين على قاعدة مثلث معلوم بحيث يكافئه
- ٨ اذا وصل بين منتصفات أضلاع الشكل الرباعي على الترتيب بمستقيمت كان متوازي الأضلاع الحادث (راجع تمرين ٧ صفحة ٦٩) مكافئا لنصف الشكل الرباعي المذكور
- ٩ ا ب ح مثلث ٦ د منتصف ا ب ٦ هـ منتصف ا ح برهن على أنه اذا تقاطع ب هـ ٦ د في س فان المثلث ب س د يكافئ الشكل الرباعي ا د س هـ
- ١٠ اذا رسمنا مثلثين متكافئين على قاعدة واحدة كل في جهة فان هذه القاعدة أو امتدادها تتصف بالمستقيم الواصل بين رأسى المثلثين

[لابأس بارجاء الطريقة الآتية في أول الأمر وعلى كل حال فلا يجوز إعطاؤها إلا بعد نظرية ٢٩]

مساحة المثلث - المطلوب حساب مساحة المثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة

مثلا اذا كانت أضلاع المثلث تساوى ٢١ مترا ١٠٦ أمتار ١٧٦ مترا فانه يمكن إيجاد

مساحته بالطريقة الآتية

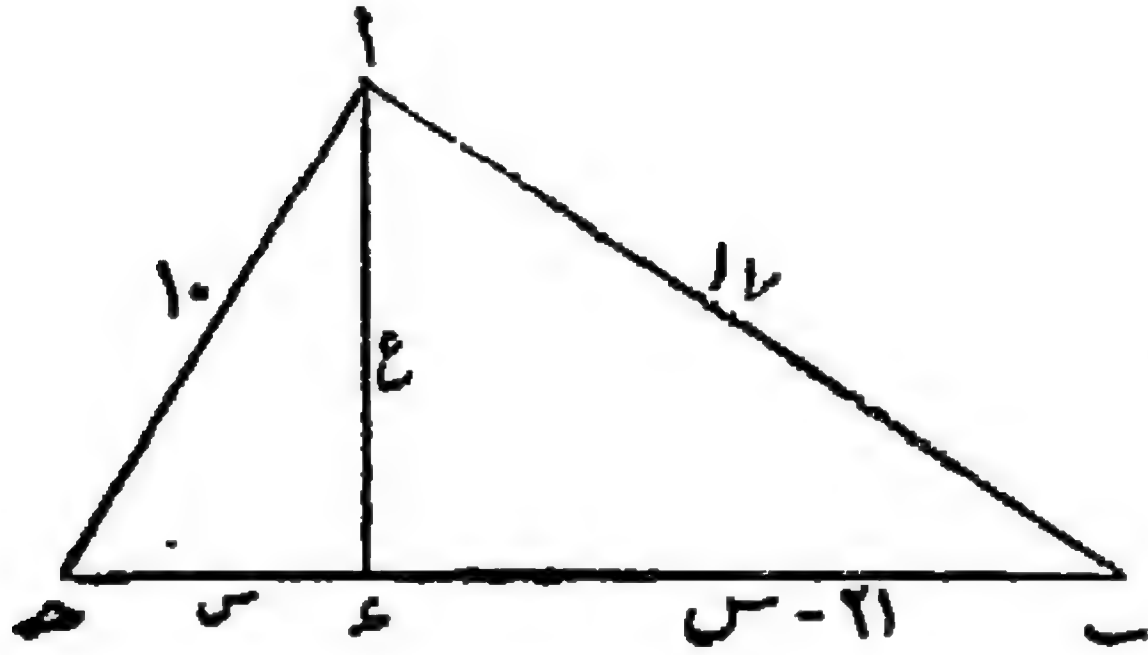
نفرض أن a b c المثلث المعلومة أضلاعه فلايجاد

مساحته

نزل العمود a على b ونرمز بالحرف e لطول

a وبالحرف s لطول c فيحدث أن

$$s - 21 = c$$



ومن نظرية ٢٩ نجد في المثلث a b القائم الزاوية أن $a^2 = c^2 - b^2$ $a^2 = s^2 - 10^2$

وفي المثلث القائم الزاوية a b c أن $a^2 = c^2 - b^2$ $a^2 = (s-21)^2 - 17^2$

$$\therefore 10^2 - s^2 = (s-21)^2 - 17^2$$

$$100 - s^2 = s^2 - 42s + 441 - 289$$

ومنه ينتج أن

$$s = 6$$

ومن حيث أن $a^2 = c^2 - b^2$ $a^2 = s^2 - 10^2$

$$a^2 = 6^2 - 10^2 = 36 - 100 = -64$$

أو

$$\therefore e = 8$$

ومن حيث أن مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة \times الارتفاع

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \left(\frac{1}{2} \times 21 \times 8\right) = 84 \text{ مترا مربعا}$$

تمارين

المطلوب إيجاد مساحة المثلث بالطريقة المتقدمة اذا كانت أطوال أضلاعه كما يأتي

١	٢٠	١٣	١١	٤	٣٠	٢٥	١١	(من السنتيمترات)
---	----	----	----	---	----	----	----	------------------

٢	١٥	١٤	١٣	٥	٣٧	٣٠	١٣	(من الديسيمترات)
---	----	----	----	---	----	----	----	------------------

٣	٢١	٢٠	١٣	٦	٥١	٣٧	٢٠	(من الأمتار)
---	----	----	----	---	----	----	----	--------------

٧ اذا كانت الأضلاع ٦ ٦ ٦ تدل على وحدات ما من وحدات الأطوال فاثبت

$$\text{(أولا) أن } s = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

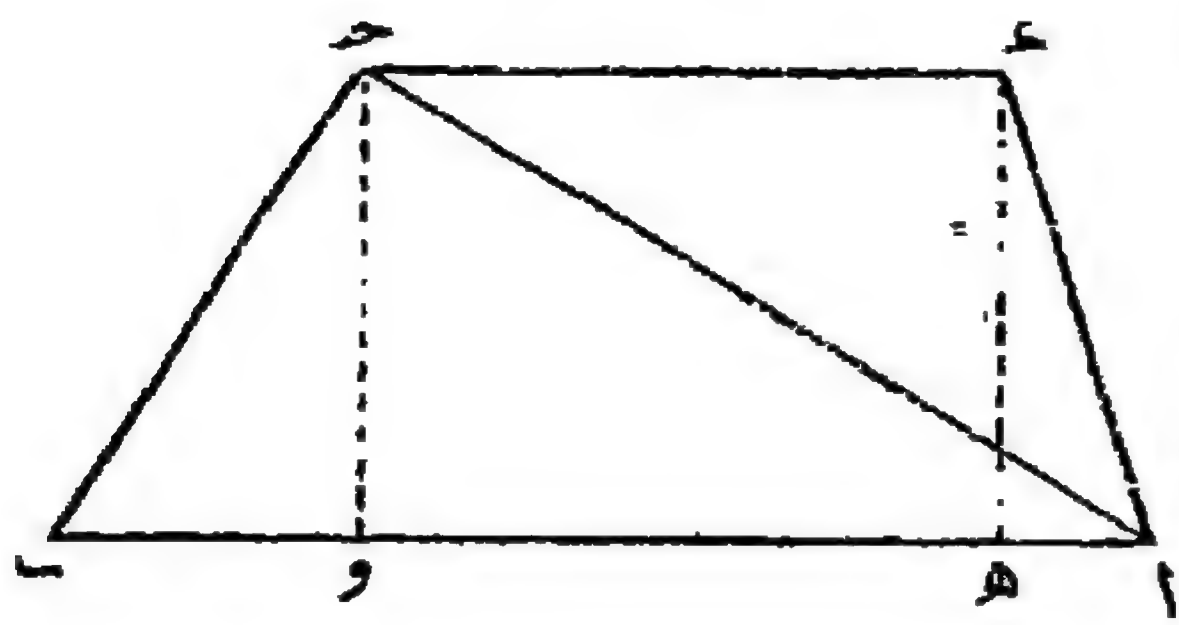
$$\text{(ثانيا) أن } e = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} - b$$

$$\text{(ثالثا) أن } \Delta = \frac{1}{4} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

مساحة الأشكال الرباعية

نظرية ٢٨

المطلوب إيجاد مساحة (أولاً) شبه المنحرف (ثانياً) أى شكل رباعي



(أولاً) ا ب ح د شبه منحرف ضلعا المتوازيان

هما ا ب و ح د

نصل ا ح وننزل العمودين د هـ و ح و على ا ب

فلو رمزنا للقاعدة ا ب بالحرف و وللقاعدة

د ح بالحرف و

وللارتفاع ح و أو د هـ بالحرف ع وكانت هذه الرموز دالة على عدد

الوحدات الطولية التي يحتوى عليها كل من هذه الخطوط

لحدث أن مساحة ا ب ح د = ا ب ح د + ا ب ح د

$$= \frac{1}{2} ا ب \times ح و + \frac{1}{2} د ح \times د هـ$$

$$= \frac{1}{2} و \times ع + \frac{1}{2} هـ \times ع$$

$$= \frac{1}{2} ع (و + هـ)$$

أى أن مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب نصف الارتفاع في مجموع قاعدتيه المتوازيتين

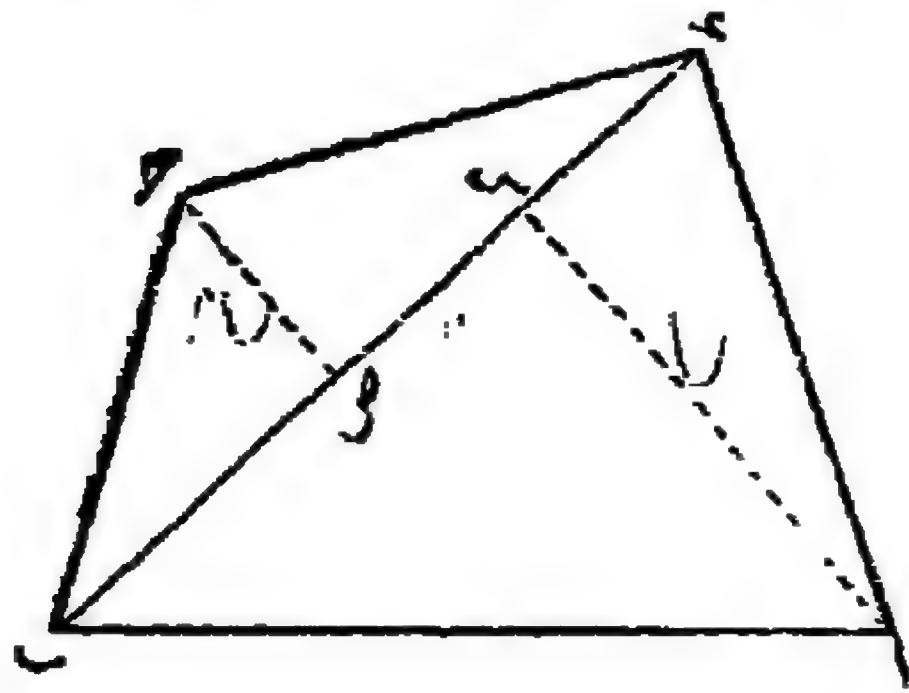
(ثانياً) نفرض أن ا ب ح د شكلاً رباعياً

ونصل أحد قطريه وليكن ب د وننزل عليه من ا كـ

العمودين ا س و ب ح ص

فاذا دلت الرموز ع و ع على وحدات الطول التي يحتوى

عليها كل من ب د و ا س و ب ح ص



فان مساحة الشكل الرباعي ا ب ح د = ا ب د + ا ب د

$$= \frac{1}{2} ب د \times ا س + \frac{1}{2} ب د \times ب ح$$

$$= \frac{1}{2} ع \times و + \frac{1}{2} ع \times هـ$$

$$= \frac{1}{2} ع (و + هـ)$$

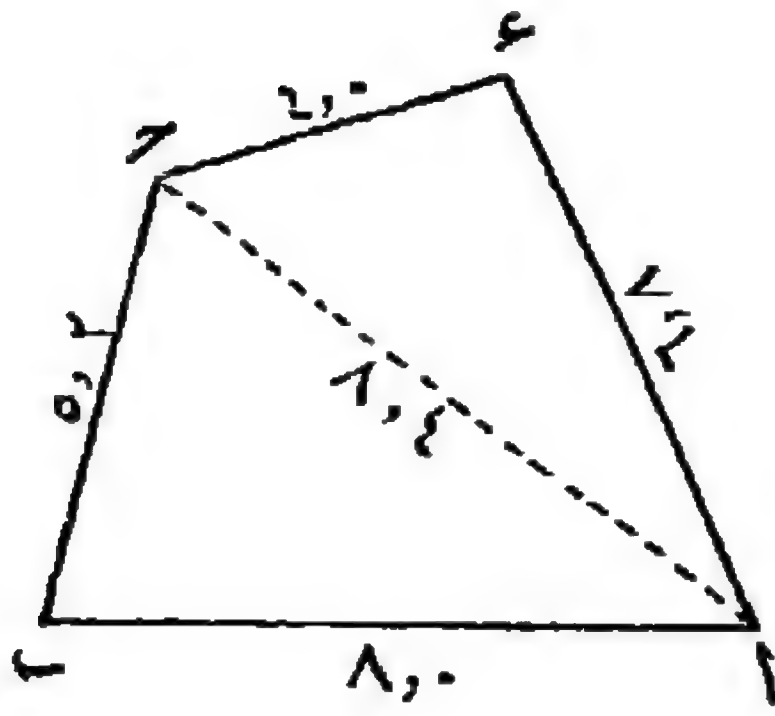
أى أن مساحة الشكل الرباعي تساوى نصف حاصل ضرب أحد قطريه في مجموع الارتفاعين

النازليين عليه من الرأسين المقابلين له

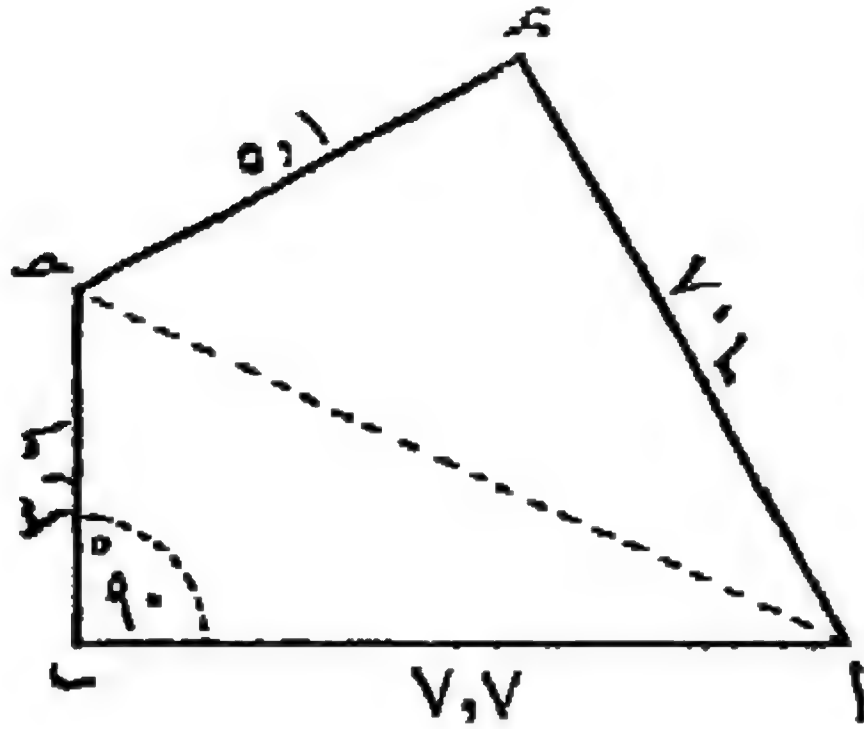
تمارين

(عددية وتخطيطية)

- ١ المطلوب إيجاد مساحة شبه المنحرف الذى طول قاعدتيه المتوازيتين $٤,٧$ من السنتيمترات $٣,٣$ من السنتيمترات وارتفاعه $١,٥$ من السنتيمترات
- ٢ ما مساحة الشكل الرباعى $ا ب ح د$ الذى طول قطره $ا ح = ١٧$ سنتيمترا والعمود النازل عليه من $ب$ يساوى ١١ سنتيمترا والنازل عليه من $د$ يساوى ٩ سنتيمترات
- ٣ حوش على صورة الشكل الرباعى $ا ب ح د$ رسم بمقياس سنتيمتر لكل ٥ امتار فكان فى الرسم طول القطر $ا ح = ٨,٢$ من السنتيمترات والعمود النازل عليه من $ب = ٣,٤$ من السنتيمترات والنازل عليه من $د = ٢,٦$ من السنتيمترات والمطلوب إيجاد مساحة الحوش المذكور



- ٤ ارسم شكلا رباعيا من الرسم المرفق مع العلم بأن الأبعاد مبينة بالسنتيمترات وانزل عمودين من $ب$ و $د$ على $ا ح$ وأوجد مساحة الشكل بعد قياس العمودين المذكورين



- ٥ ارسم الشكل الرباعى $ا ب ح د$ طبقا لمعلومات فى الشكل المرفق مع العلم بأن الأبعاد مبينة بالسنتيمترات ثم أوجد مساحته بعد قياس ما يلزم لإيجادها

- ٦ المطلوب رسم شبه المنحرف $ا ب ح د$ الذى قاعدتاه المتوازيتان $ا ب$ و $ح د$ مع العلم بأن $ا ب = ١٠$ سنتيمترات $ح د = ٦$ سنتيمترات $ا ح = ٥$ سنتيمترات $ب د = ١$ سنتيمترات $ا د = ٦$ سنتيمترات $ب ح = ٩$ سنتيمترات ثم إيجاد مساحته بعد قياس ما يلزم لإيجادها

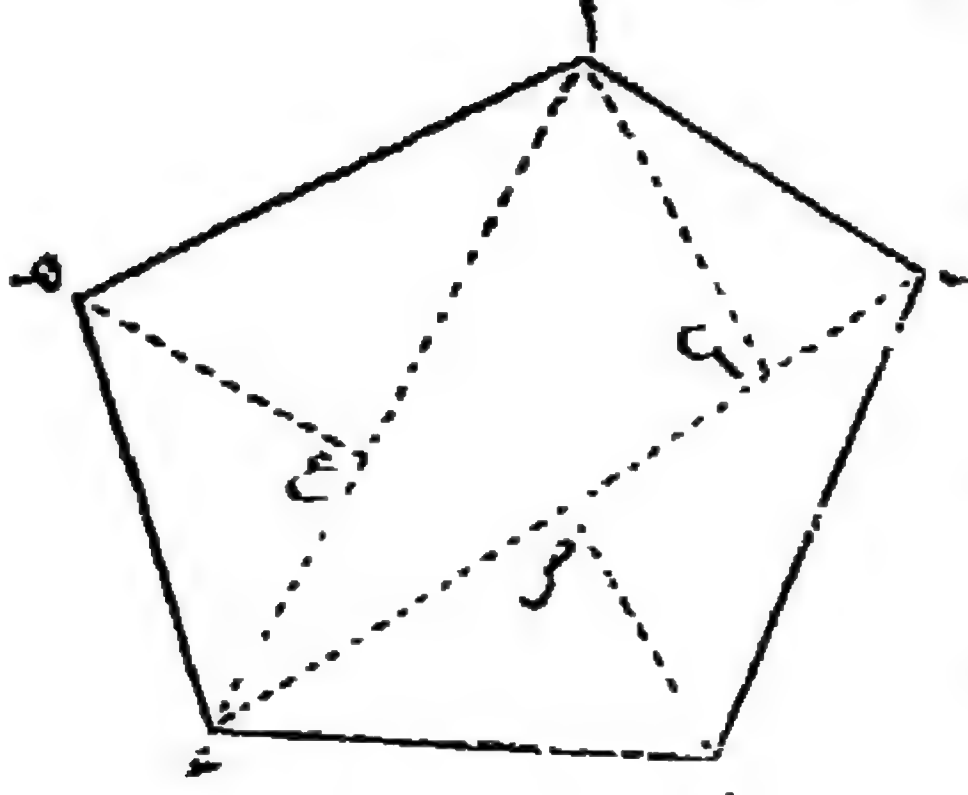
- ٧ ارسم شبه المنحرف $ا ب ح د$ الذى قاعدتاه المتوازيتان $ا ب$ و $ح د$ مع العلم بأن $ا ب = ٩$ سنتيمترات $ح د = ٣$ سنتيمترات $ا ح = ٥$ سنتيمترات $ب د = ١$ سنتيمترات $ا د = ٦$ سنتيمترات $ب ح = ٩$ سنتيمترات ثم أوجد مساحته بعد قياس ما يلزم لإيجادها

- ٨ معلوم أن مساحة الشكل الرباعى $= \frac{1}{4}$ القطر \times مجموع العمودين النازلين عليه من الرأسين المقابلين له أثبت أنه اذا كان قطراه متعامدين كانت مساحته $= \frac{1}{4}$ حاصل ضرب القطرين

- ٩ اذا كان طول كل من قطرى الشكل الرباعى ثابتا ومقدار الزاوية المحصورة بينهما ثابتا أيضا فان مساحته لا تتغير مهما تغير وضع نقطة تقاطعهما

مساحة الأشكال الكثيرة الأضلاع

لايجاد مساحة أى شكل كثير الأضلاع طريقتان

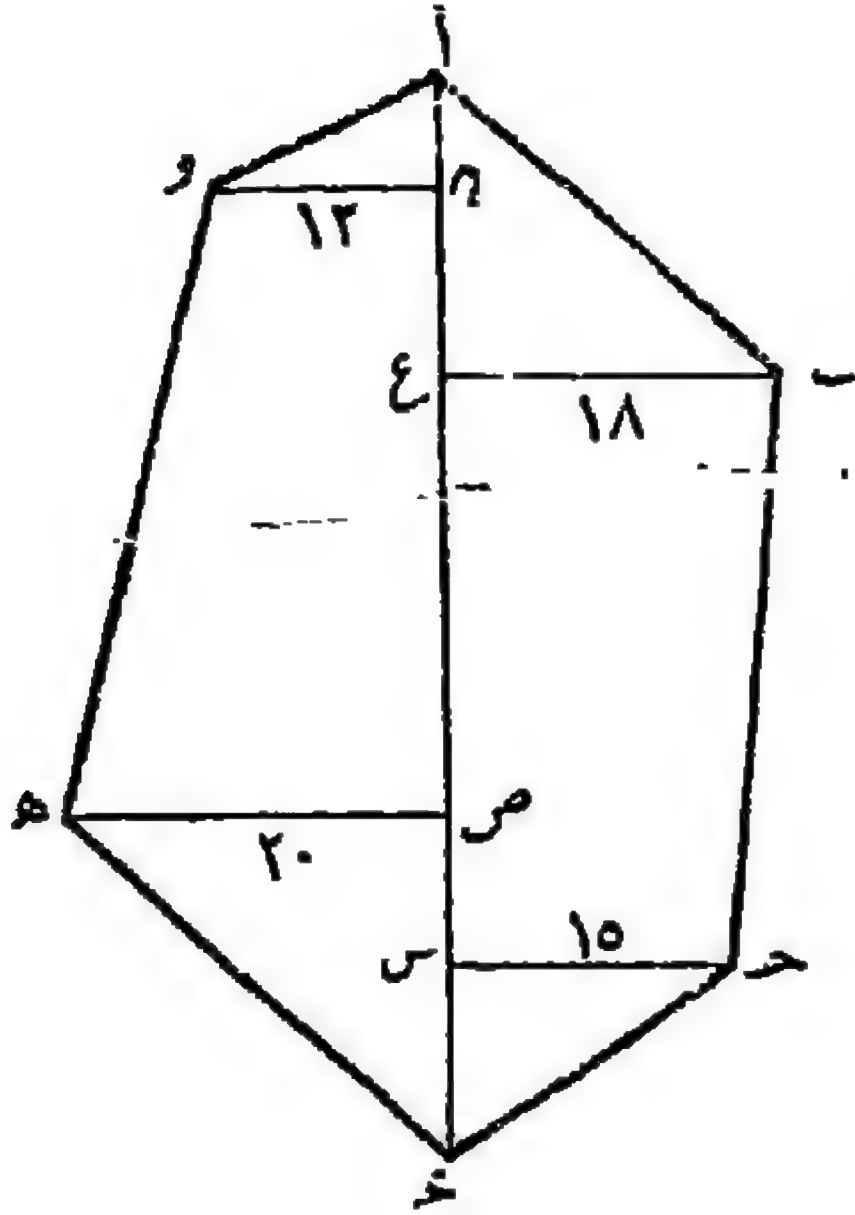


الأولى - تقسم الشكل الى جملة مثلثات ونوجد مساحة كل مثلث بعد قياس مايلزم لايجادها ثم نضم هذه المساحات بعضها الى بعض

فمثلا الشكل ا ب ح د هـ يمكن ايجاد مساحته اذا عرفنا طول كل من القطرين د ا و ب والاعمدة اس و ص و هـ ع النازلة عليهما

الثانية - تقسم الشكل الى مثلثات قائمة الزاوية وأشباه منحرفات قائمة الزاوية بانزال أعمدة من رؤوسه على أحد أقطاره (ا د كما في الشكل) المعتبر قاعدة للأشكال الحادثة فلكون أجزاء القاعدة ومقادير الأعمدة النازلة عليها من رؤوس الشكل يمكن أن تقاس بغاية الدقة يتوصل بالطرق المتقدمة الى ايجاد مساحات الأجزاء المختلفة المتركب منها الشكل المذكور ثم نضم بعضها الى بعض والنتيجة هو مقدار مساحة الشكل

فمثلا لايجاد مساحة الحوش ا ب ح د هـ و من الأقيسة التي في الجدول الآتي



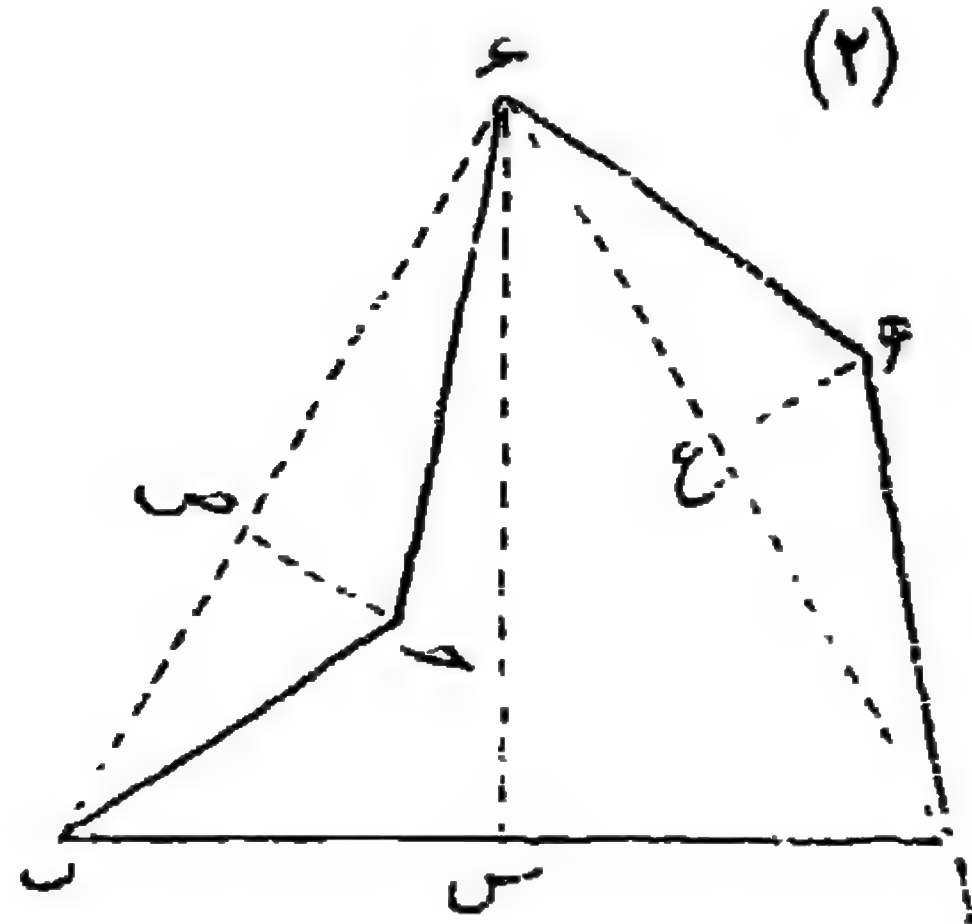
(فبملاحظة أن أقيسة أجزاء القاعدة د ا مأخوذة من ابتداء نقطة د الى موقع كل عمود نازل عليها من رؤوس الشكل)

أمتار		
٥٦ = ا د		
٥٠ = د و	١٢ = و	
٤٠ = ع د	١٨ = ع	
١٨ = ص د	٢٠ = ص	
١٥ = س د		

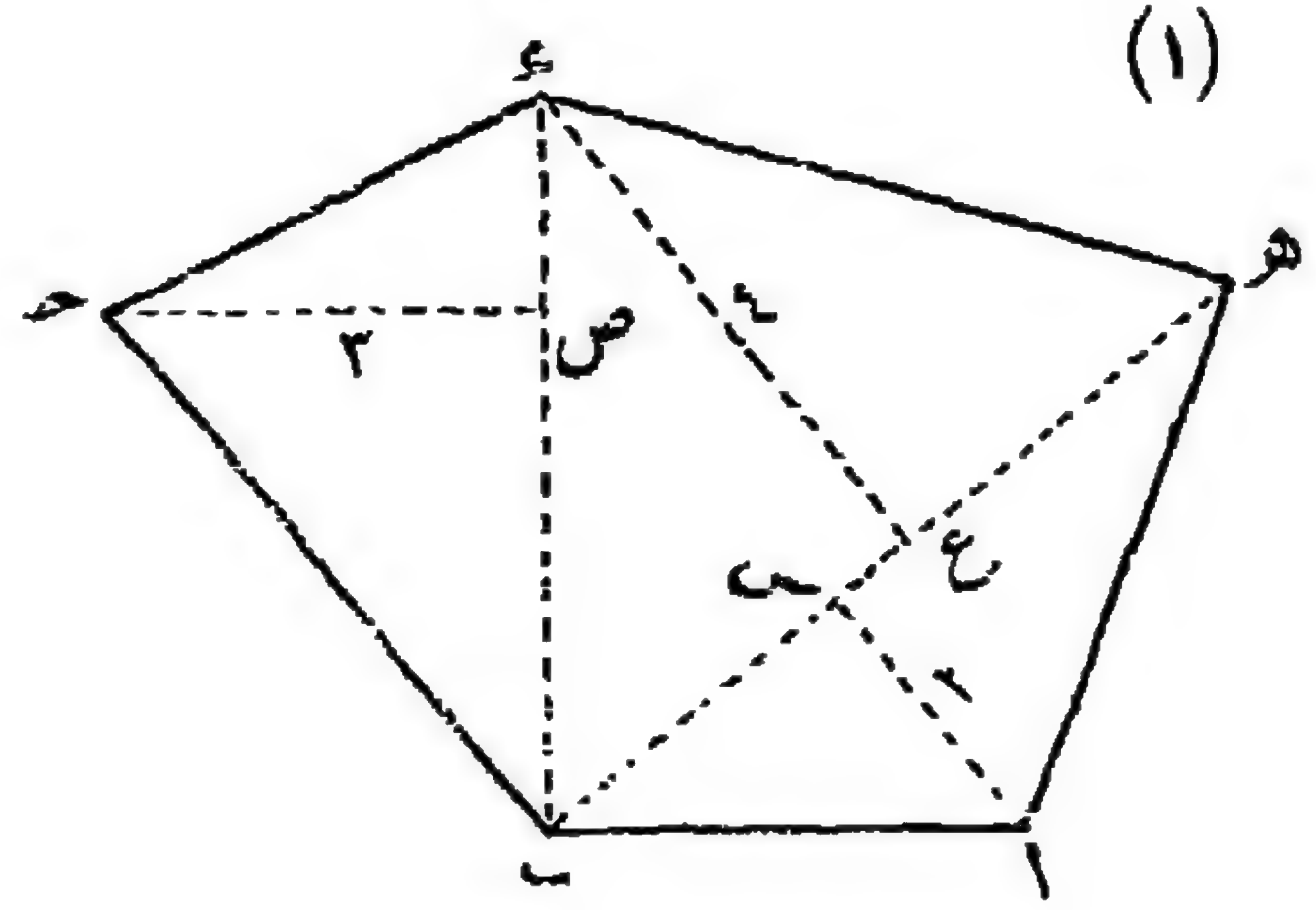
نجد أن Δ ب ج د $= \frac{1}{2} \times د \times س = \frac{1}{2} \times ١٥ \times ١٠ = ٧٥$ مترا مربعا
 Δ د ج هـ $= \frac{1}{2} \times د \times ص = \frac{1}{2} \times ٢٠ \times ١٨ = ١٨٠$ »
 Δ ا ب ج $= \frac{1}{2} \times ا \times ع = \frac{1}{2} \times ١٢ \times ١٨ = ١٠٨$ »
 Δ ا ب د $= \frac{1}{2} \times ا \times و = \frac{1}{2} \times ١٢ \times ٦ = ٣٦$ »
 وشبه المنحرف من ح ب ع $= \frac{1}{2} \times (س + ع) \times د = \frac{1}{2} \times (١٥ + ٢٠) \times ١٨ = ٣٣٠$ مترا مربعا
 وشبه المنحرف ص هـ و $= \frac{1}{2} \times (ص + و) \times د = \frac{1}{2} \times (٢٠ + ١٢) \times ١٨ = ٥١٢$ مترا مربعا
 وبالجمع يحدث أن مساحة الشكل ا ب ح د هـ و $= ١٤٤٢$ »

تمارين

١ المطلوب إيجاد مساحة كل من الشكلين (١) و (٢) إذا قيست أبعادهما بالسنتيمترات



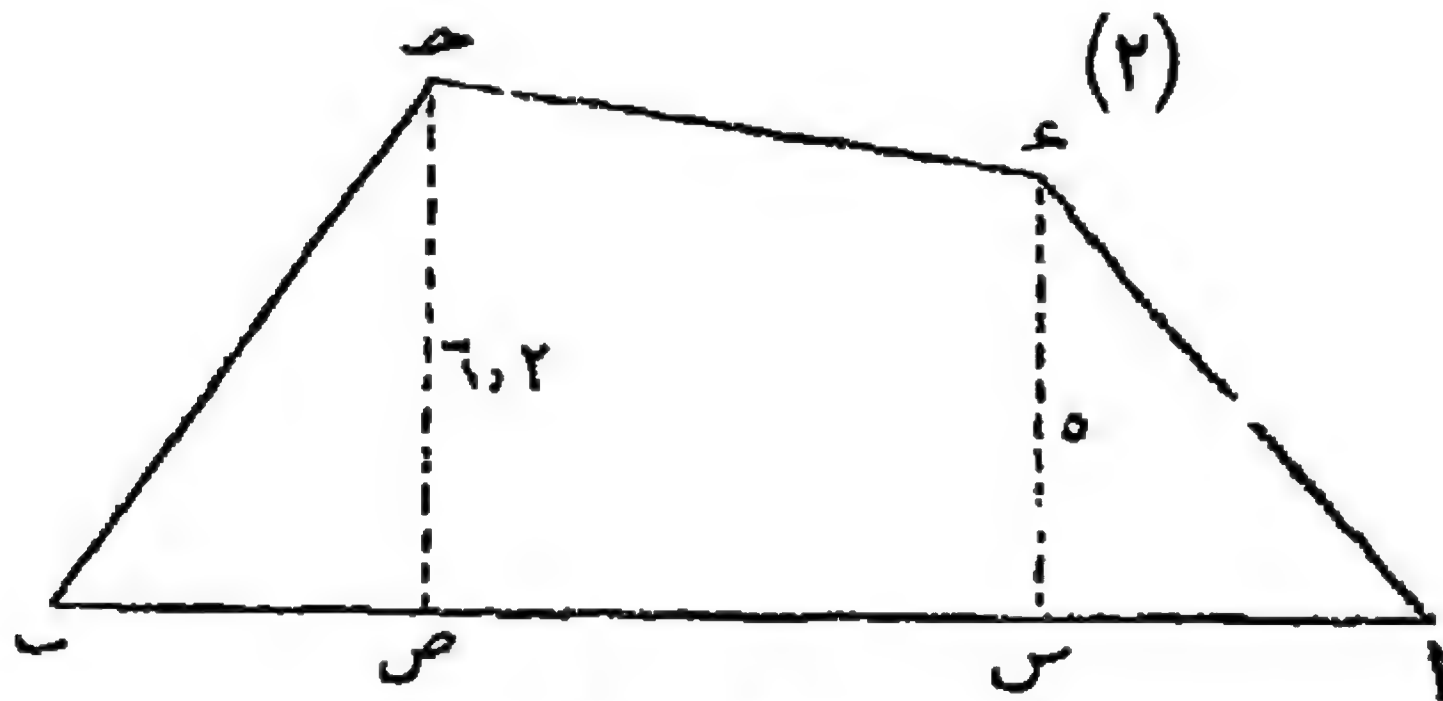
أ ب = ب د = د = ٤ سنتيمترات
ح ص = هـ ع = ١ سنتيمتر
د س = ٢ من السنتيمترات



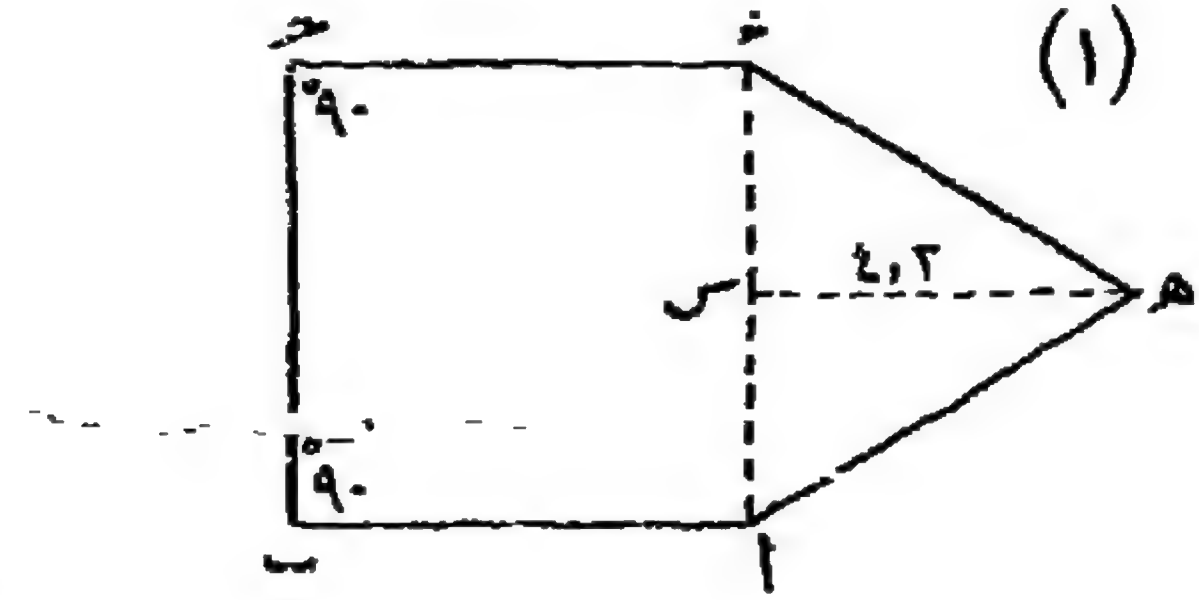
ب د = ٥ سنتيمترات
ب هـ = ٦ »

ومقادير الأعمدة كما هي مينة في الشكل

٢ ارسم شكلين كالآتيين بحيث تكون أبعادهما مقدرة بالأقيسة الحقيقية المبينة بعد وأوجد مساحتهما



أ س = ٤ من السنتيمترات
س ح = ٦,٩ »
ص ب = ٤,١ »



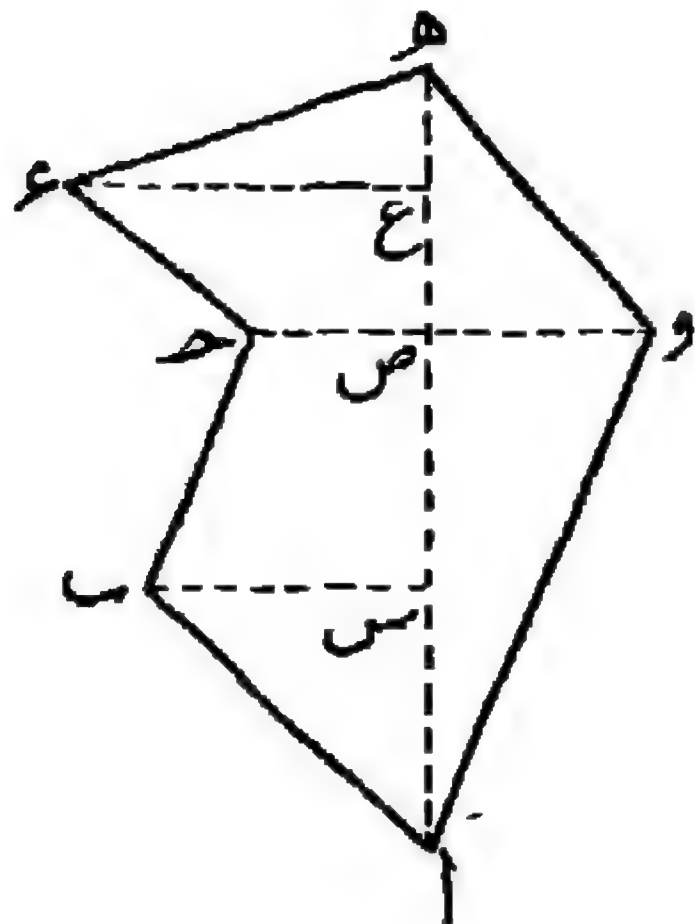
هذا الشكل متساوي الأضلاع

وطول ضلعه ٥ سنتيمترات

وكذلك هـ س مقدور بالسنتيمترات

٣ المطلوب إيجاد مساحة الشكل أ ب ح د هـ و من المقادير الآتية ووضع رسم بمقياس سنتيمتر

لكل ٢٠ مترا



أمتار

٨٠ = د ع	١٨٠ = هـ أ	ص و = ٥٠
٤٠ = ح ص	١٥٠ = ع أ	
٦٠ = ب س	١٢٠ = ص أ	
	٥٠ = س أ	

تمارين على الأشكال الرباعية

(مسائل نظرية)

١ ا ب ح د مستطيل نصفنا كلا من أضلاعه في النقط ه و و ع ك ط ثم وصلنا بينها على الترتيب بمستقيمت برهن على

(أولا) أن الشكل ه و ع ط معين

(ثانيا) أن مساحة ه و ع ط نصف مساحة ا ب ح د

ومن ذلك برهن على أن مساحة المعين $= \frac{1}{4}$ حاصل ضرب قطريه وبين ما إذا كانت هذه القاعدة تسرى على كل شكل رباعي قطراه متعامدان مع إيضاح ذلك بالرسم

٢ برهن على أن أى مستقيم ماز بنقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع يقسمه الى جزأين متكافئتين ومن هذا بين كيف تقسم متوازي الأضلاع ا ب ح د الى جزأين متكافئتين

(أولا) بمستقيم يمر بنقطة مفروضة

(ثانيا) بمستقيم عمودي على الضلع ا ب

(ثالثا) بمستقيم يوازي آخر معلوما

٣ ا ب ح د شبه منحرف قاعدته المتوازيان هما ا ب و ح د برهن على أنه اذا نصف ا د في س ورسم مستقيم ماز بهذه النقطة ومواز ب ح وقاطع ا ب في ص وامتداد ح د في ع يحدث

(أولا) أن شبه المنحرف ا ب ح د يكافئ متوازي الأضلاع ص ب ح د ع

(ثانيا) أن شبه المنحرف ا ب ح د يكافئ ضعف Δ ب س ح

(مسائل تخطيطية)

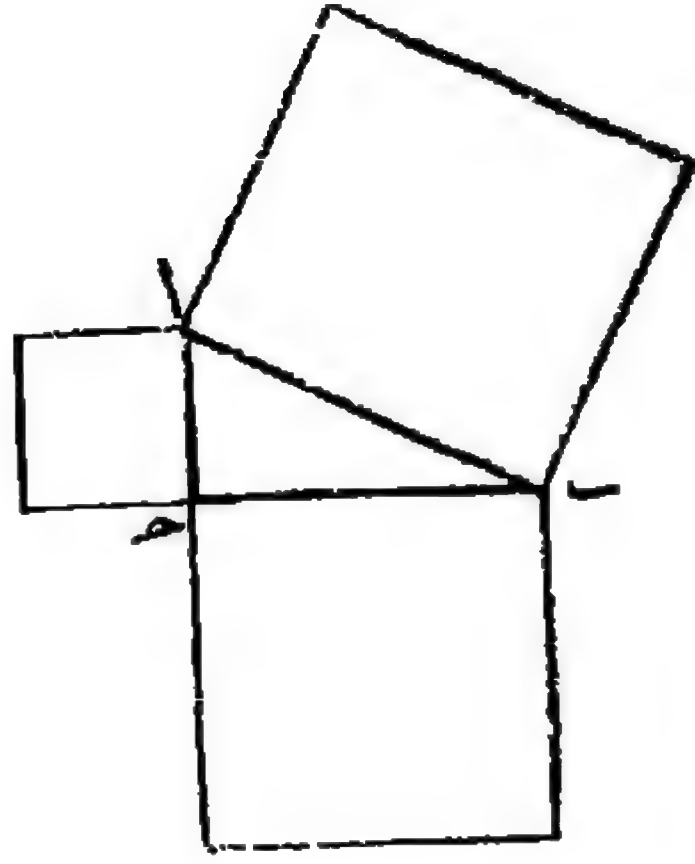
٤ ا ب ح د شكل رباعي قطراه متعامدان وطول أحدهما ٧,٥ من السنتيمترات والآخر ٥,٥ من السنتيمترات والمطلوب إيجاد مساحته بين بالرسم أن هذه المساحة لا تتغير أينما تقاطع القطران ماداما متعامدين

٥ ارسم متوازي الأضلاع ا ب ح د الذى فيه ا ب = ٨ سنتيمترات و ب ح = ٣,٢ من السنتيمترات والارتفاع المحصور بين ا ب و ح د يساوى ٣ سنتيمترات واستخرج طول الارتفاع المحصور بين ب ح و ا د وحقق الناتج بقياس هذا البعد

٦ ارسم شكلا متوازي الأضلاع أحد أضلاعه = ٦,٣ من السنتيمترات وأحد قطريه = ٨,٥ من السنتيمترات والآخر = ٦ سنتيمترات ثم أوجد مساحته بعد قياس ما يلزم لإيجادها

٧ ا ب ح د شكل متوازي الأضلاع طول قاعدته ا ب ثابت ومساحته ثابتة والمطلوب إيجاد المحل الهندسى لنقطة تقاطع قطريه

تمارين تمهيدية لنظرية ٢٩



الغرض من المسائل الآتية مقارنة المربع المنشأ على وتر المثلث $ا ب ح$ القائم الزاوية فى $ح$ بمجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين كما هو مبين فى الشكل

١ اذ ارسم الشكل المذكور على فرض أن $ا ح = ٣$ سنتيمترات

$ب ح = ٤$ سنتيمترات

حدث أن مساحة المربع المنشأ على $ا ح = ٩$ أو ٣ سنتيمترات مربعة ومساحة المربع المنشأ على $ب ح = ١٦$ أو ٤ سنتيمترات مربعة

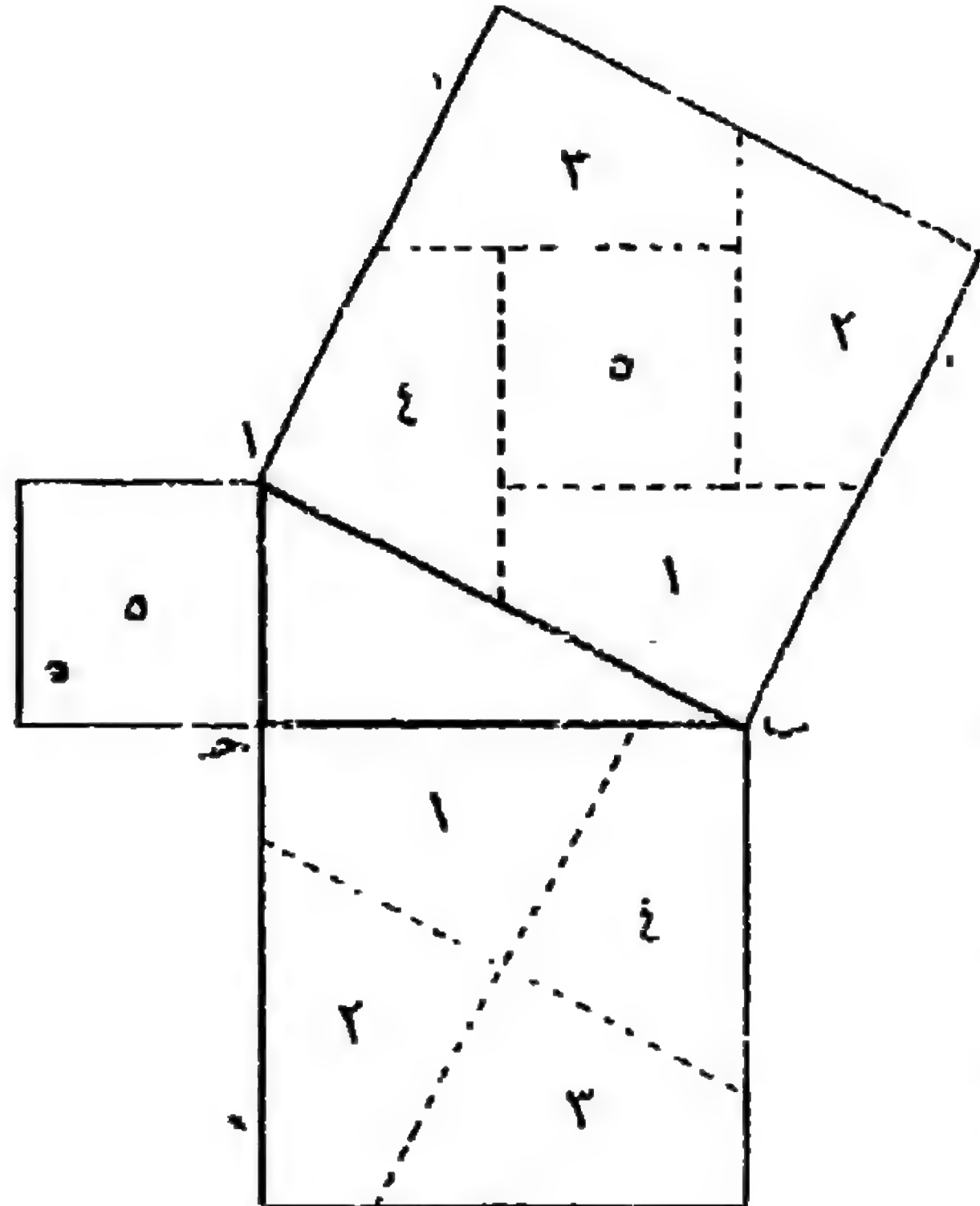
∴ مجموع المربعين المنشأين على $ا ح = ٢٥$ سنتيمترات مربعة

إذا تقرر هذا فقس $ا ب$ واستخرج مساحة المربع المنشأ عليه ثم قارن هذه المساحة بمجموع المساحتين المتقدمتين

٢ المطلوب عمل التمرين السابق إذا كان $ا ح = ٢,٥$ من السنتيمترات $ب ح = ٦$ سنتيمترات

٣ إذا كان الضلع $ا ح = ١٥$ $ب ح = ٨$ $ا ب = ١٧$ بين بالحساب أن $ا ح^٢ + ب ح^٢ = ا ب^٢$

وارسم على ورق المربعات المثلث $ا ب ح$ الذى طول ضلعه $ا ح = ١٥$ $ب ح = ٨$ $ا ب = ١٧$ من وحدات طولية ثم قس $ا ب$



٤ قارن بين مساحة المربع المنشأ على الوتر $ا ب$ ومجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين بالطريقة الآتية وهى

أن ترسم فى المربع المنشأ على $ب ح$ مستقيمين أحدهما يوازي الوتر $ا ب$ والآخر عمودى عليه من نقطة ملتقى قطري المربع فينقسم المربع بهذين المستقيمين الى أربعة أقسام ينطبق كل منها على الآخر تماماً

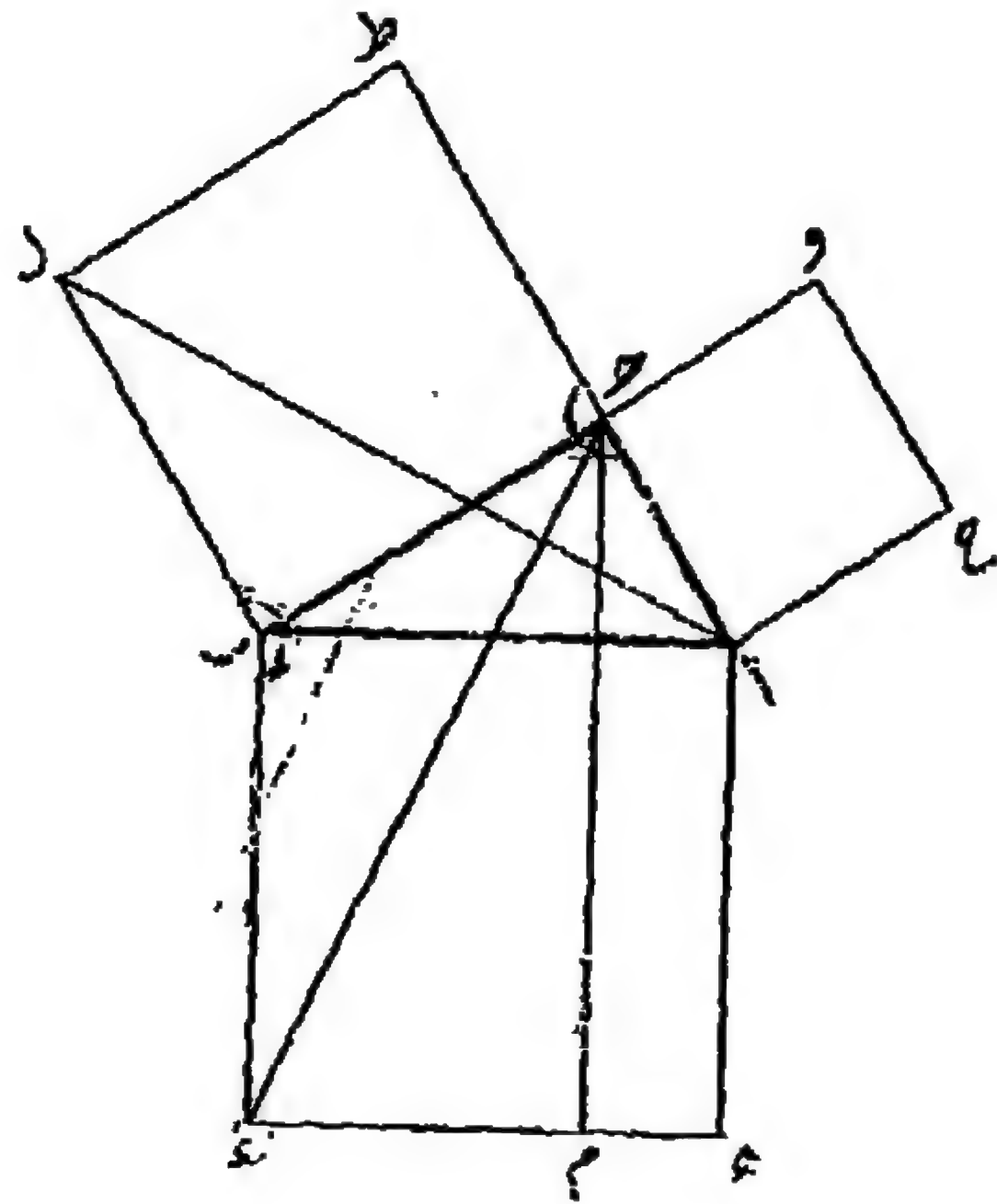
فاذا أضيف الى هذه الأقسام المربع المنشأ على الضلع $ا ح$ كوّنت أجزاء المربع المنشأ على الوتر $ا ب$ كما هو مبين فى الشكل بالأرقام

ومن هذا يرى أن المربع المنشأ على وتر القائمة فى المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين

وبلى هذه التمارين البرهان النظرى لهذه النظرية

نظرية ٢٩

المربع المنشأ على وتر المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين



ليكن $\angle A$ مثلثاً قائم الزاوية في \angle

ويطلب البرهنة على أن المربع المنشأ على الوتر AB = مجموع المربعين المنشأين على الضلعين AC و BC

لذلك تنشئ المربع $ABDE$ على AB والمربع $ACFG$ على AC والمربع $BCHK$ على BC

ثم نرسم من C المستقيم CM يوازي AB و AC

ونصل CL

البرهان — من حيث أن كلا من الزاويتين $\angle A$ و $\angle C$ قائمة

\therefore المستقيم CL يكون على امتداد المستقيم AB

ومن حيث أن $\angle A = \angle C$ بالقيام

\therefore بإضافة $\angle A$ إلى كل منهما

يحدث أن الزاوية الكلية $\angle C =$ الزاوية الكلية $\angle A$

وفي المثلثين $\triangle BCL$ و $\triangle ABC$

$$\angle C = \angle A$$

$$\angle B = \angle B$$

$$\text{والزاوية المحصورة } \angle C = \text{الزاوية المحصورة } \angle A$$

من حيث أن

∴ $\Delta \text{ ح ب د} = \Delta \text{ ل ب ا}$ (نظرية ٤)

لكن المستطيل ب م يكافئ ضعف $\Delta \text{ ح ب د}$ لأنه متحد معه في القاعدة ب د ومحصور معه بين المتوازيين ب د و ك ح م

والمربع ب ط يكافئ ضعف $\Delta \text{ ل ب ا}$ لأنه متحد معه في القاعدة ب ل ومحصور معه بين المتوازيين ب ل و ك ا ط

∴ المستطيل ب م يكافئ المربع ب ط

وكذا اذا وصلنا ح ه ب ح يحدث أن

المستطيل ا م يكافئ المربع ا و

∴ المربع الكلي ب ه = مجموع المربعين ب ط و ا و

أى ان المربع المنشأ على الوتر ا ب = مجموع المربعين المنشأين على الضلعين ب ح و ك ح ا وهو المطلوب

ملاحظة - تعرف هذه النظرية بنظرية فيثاغورس وخلاصتها فيما يأتى

$$\overline{ا ب}^2 = \overline{ب ح}^2 + \overline{ا ح}^2$$

وبعبارة أخرى اذا دل الرمز ا ب على طولى الضلعين المحصورة بينهما الزاوية القائمة ح ك ح على الوتر

$$\text{كان } \overline{ب ح}^2 + \overline{ا ح}^2 = \overline{ا ب}^2$$

$$\text{ومنه ينتج أن } \overline{ا ح}^2 = \overline{ا ب}^2 - \overline{ب ح}^2 = \overline{ب ح}^2 - \overline{ب ح}^2 = 0$$

تنبيه ١ - يؤخذ مما تقدم أنه اذا فرض أن س نقطة تقاطع ح م مع ا ب

فان المربع ب ط يكافئ المستطيل ب م

أى أن $\overline{ب ح}^2$ يكافئ المستطيل ب ا \times ب س (١)

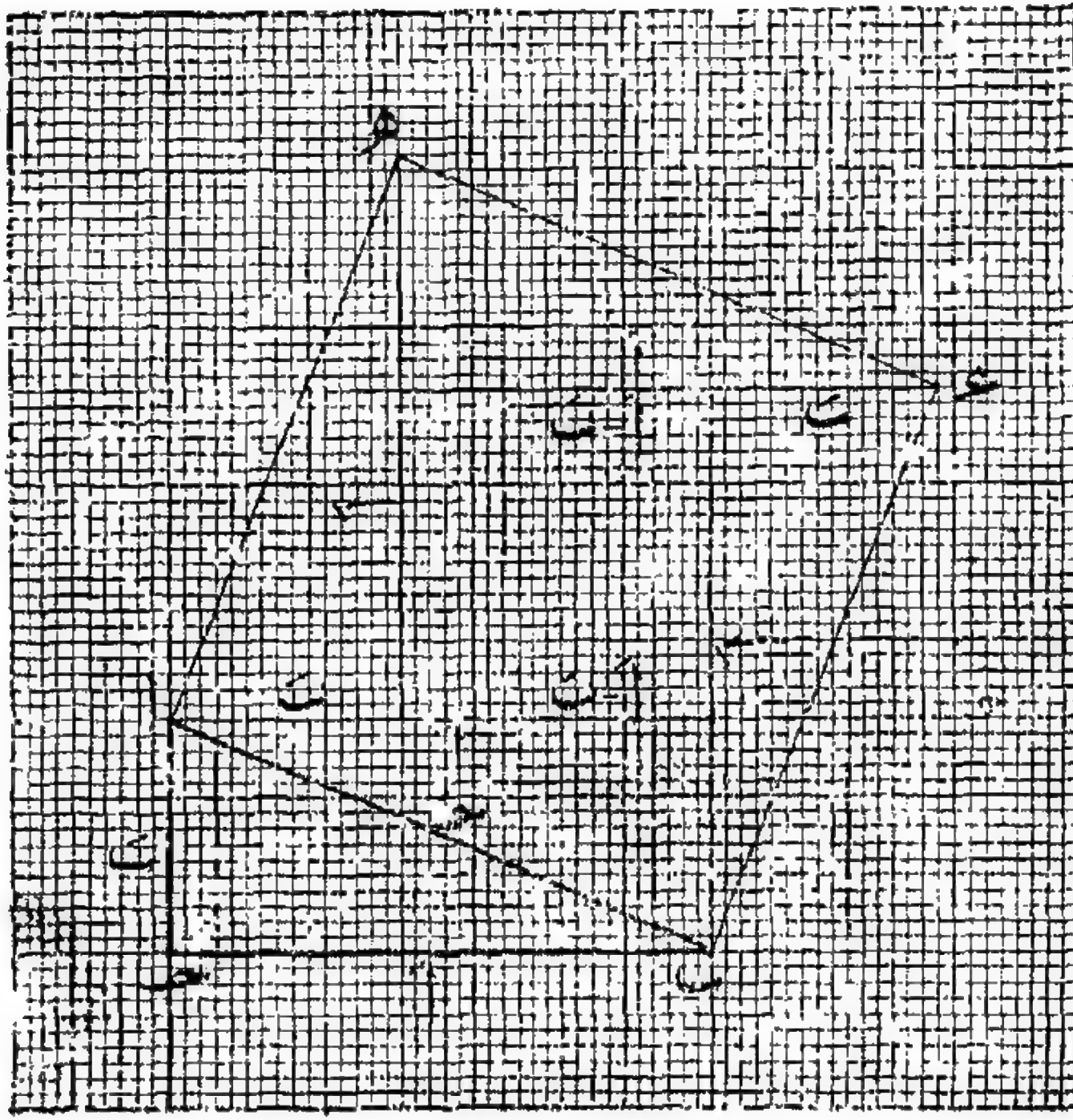
وكذلك المربع ا و يكافئ المستطيل ا م

أى أن $\overline{ا ح}^2$ يكافئ المستطيل ا ب \times ا س (٢)

تنبيه ٢ - من حيث انه يمكن البرهنة على أن المربعين المنشأين على ضلعين متساويين يتكافآن بذلك بواسطة انطباقهما كل على الآخر فانه يمكن الاستدلال على أن أضلاع المربعات المتكافئة متساوية



طريقة عملية للبرهنة على نظرية فيثاغورس



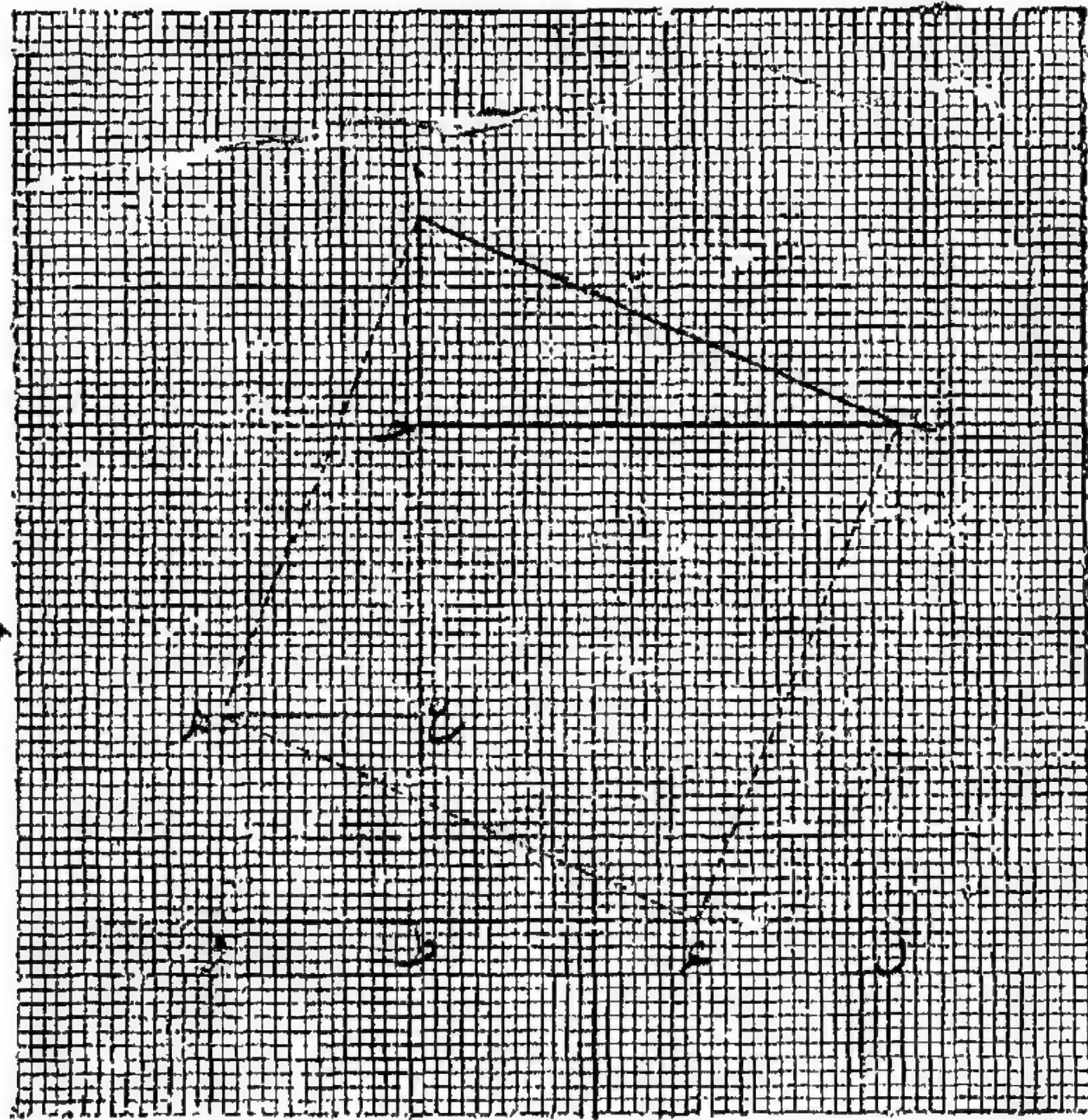
(أولاً) نفرض أن $a > b$ المثلث القائم الزاوية المعلوم وأن a و b هـ المربع المنشأ على الوتر a فإذا رسم من رؤوس المربع المذكور مستقيمت موازية للضلعين b و c حدث في الشكل أربعة مثلثات قائمة الزاوية كل منها ينطبق تمام الانطباق على المثلث المفروض $a > b$

فإذا رمزنا بالحروف a' و b' و c' لأضلاع المثلث كما تقدم يحدث أن المربع المنشأ على الوتر $c' = e$ مثلثات قائمة الزاوية + المربع المتوسط المين في الشكل أى أن

$$c'^2 = (a' - b')^2 + a' \times b' \times \frac{1}{2} \times 4 =$$

$$c'^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' + 2a'b' =$$

$$c'^2 = a'^2 + b'^2 =$$



(ثانياً) نفرض أن $a > b$ المثلث القائم الزاوية المعلوم وأن c ل المربع المنشأ على b فإذا أخذ البعد c و a و b و رسم المربع c و بجانب المربع c ل ثم وصل b و c و a نرى أن

$\triangle bcl$ يمكن تطبيقه تماماً على $\triangle ahe$ و $\triangle hce$ و $\triangle hde$ ينطبق على $\triangle ahe$ و b وذلك نراه بقطع المثلثات وتطبيقها بعضها على بعض وأن المربع $c = e$ المربع المنشأ على a

وأن a و b هـ المربع المنشأ على a وكل هذا تسهل البرهنة عليه فإذا تأملنا نرى أن a و b هـ الذي هو المربع المنشأ على الوتر يساوى مجموع المربعين c و e و المنشأين على الضلعين الآخرين

تمارين

(عددية وتخطيطية)

- ١ المطلوب رسم المثلث ABC القائم الزاوية في C مع العلم
(أولاً) بأن $\widehat{A} = 3^\circ$ سنتيمترات $\widehat{C} = 4^\circ$ سنتيمترات
(ثانياً) $\widehat{A} = 1^\circ$ من السنتيمترات $\widehat{C} = 6^\circ$ سنتيمترات
(ثالثاً) $\widehat{A} = 3,1^\circ$ » » $\widehat{C} = 8,7^\circ$ من السنتيمترات

أوجد مقدار طول الوتر في كل حالة وحقق ذلك بالقياس

- ٢ المطلوب رسم المثلث ABC القائم الزاوية في C مع العلم
(أولاً) بأن $\widehat{C} = 8,5^\circ$ من السنتيمترات $\widehat{A} = 7,5^\circ$ من السنتيمترات (راجع عملية ١٠)
(ثانياً) $\widehat{C} = 5,3^\circ$ » » $\widehat{C} = 4,5^\circ$ » »

أوجد مقدار الضلع الثالث للمثلث في كل حالة مع تحقيق ذلك بالقياس

(المطلوب حل المسائل الآتية واستخراج المقادير المطلوبة بالحساب مع وضع الرسم اللازم وتحقيق المقادير الناتجة بالقياس)

٣ مآطول سلم طرفه الأعلى على شباك يبعد عن الأرض ٤٠ متراً وطرفه الأسفل يبعد عن الحائط ٩ أمتار

٤ سارت سفينة من نقطة معينة متجهة نحو الجنوب ٣٣ كيلومتراً ثم اتجهت نحو الغرب ٥٦ كيلومتراً فما مقدار بعدها عن النقطة الأولى

٥ سفينتان أحدهما في الجهة الشرقية من نقطة معلومة والأخرى في الجهة الشمالية الغربية منها وتبعد الأولى عن هذه النقطة ٦ كيلومتراً والثانية ١,١ من الكيلومترات ما طول المسافة بين السفينتين

٦ سلم طوله ٦٥ قدماً مرتكز على حائط ونقطة ارتكاز طرفه الأعلى تبعد عن الأرض ٦٣ قدماً ما طول المسافة بين الحائط وطرفه الأسفل

٧ إذا فرضت النقطة B شرق A ونقطة C جنوبي B على مسافة ٥٥ متراً منها وكانت $\widehat{A} = 73^\circ$ متراً فما طول AB

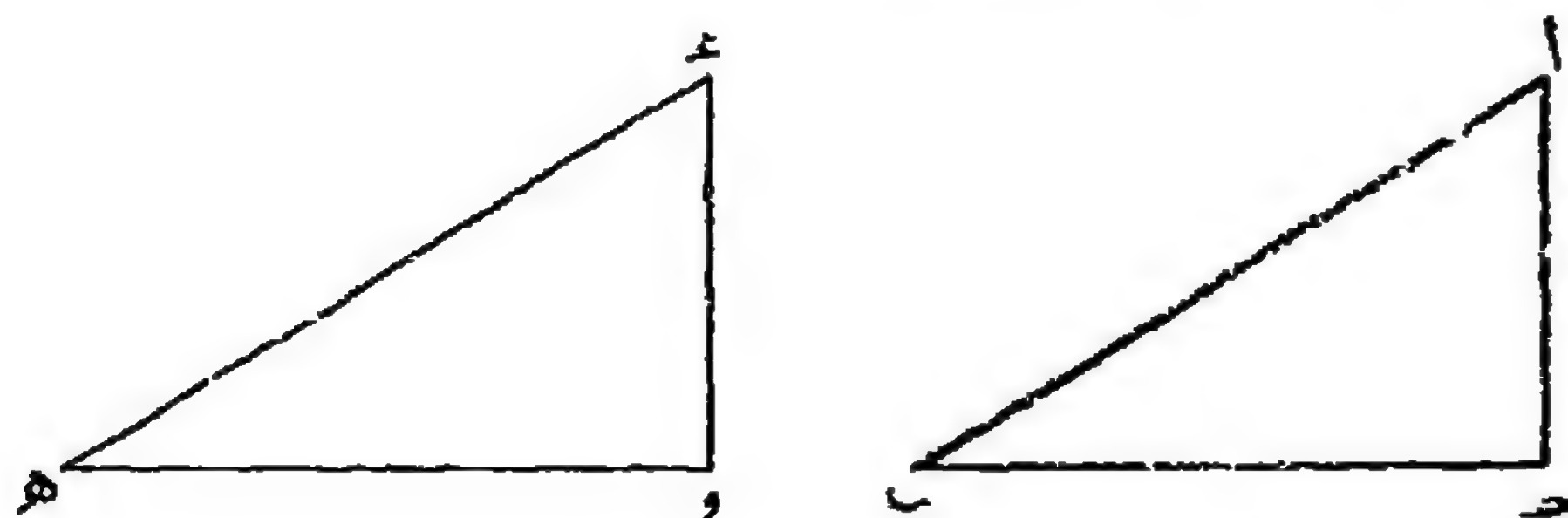
٨ سار رجل ٢٧ كيلومترا متجها نحو الجنوب ثم اتجه غربا وسار ٢٤ كيلومترا ثم شمالا وسار ٢٠ كيلومترا مابعده عن نقطة مسيره الأولى

٩ سار رجل من نقطة متجها نحو الغرب مسافة ٢٥ مترا ثم اتجه شمالا وسار ٦٠ مترا ثم شرقا وسار ٨٠ مترا ثم جنوبا وسار ١٢ مترا مابعده عن نقطة مسيره الأولى

١٠ سلم طوله ١٠ أمتار مرتكز على شبك يبعد عن الأرض ٩,٦ من الأمتار ولو مال حتى ارتكز على حائط في الجهة الأخرى من الشارع بدون أن تتغير نقطة ارتكازه على الأرض لبعثت نقطة ارتكازه على هذا الحائط عن الأرض ٢,٨ من الأمتار ماعرض الشارع

نظرية ٣٠

إذا كان المربع المنشأ على أحد أضلاع مثلث يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين كانت الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين قائمة



نفرض أن $ا ح ب$ مثلث وأن

المربع المنشأ على $ا ب =$ مجموع المربعين المنشأين على $ب ح$ و $ا ح$

ويطلب إثبات أن $د ا ح ب$ قائمة

لذلك نرسم المستقيم $هـ و = ب ح$

ونقيم على $هـ و$ من النقطة $و$ العمود $و د = ا ح$

ثم نصل $هـ د$

البرهان - من حيث أن $هـ و = ب ح$

\therefore المربع المنشأ على $هـ و =$ المربع المنشأ على $ب ح$

ومن حيث أن $و د = ا ح$

\therefore المربع المنشأ على $و د =$ المربع المنشأ على $ا ح$

ومنه ينتج أن مجموع المربعين المنشأين على $هـ و$ و $و د =$ مجموع المربعين المنشأين على $ب ح$ و $ا ح$

ومن حيث أن $د هـ و د$ قائمة

\therefore مجموع المربعين المنشأين على $هـ و$ و $و د =$ المربع المنشأ على $د هـ$

ولكن مجموع المربعين المنشأين على $ب ح$ و $ا ح =$ المربع المنشأ على $ا ب$

\therefore المربع المنشأ على $د هـ =$ المربع المنشأ على $ا ب$

\therefore $د هـ = ا ب$

وفي المثلثين $ا ح ب$ و $د هـ و$

$ا ح = د هـ$ و $و د = و د$

$ب ح = و د$ و $و د = و د$

$ا ب = د هـ$ و $د هـ = د هـ$

\therefore $د ا ح ب = د د و هـ$

لكن $د د و هـ$ قائمة

\therefore $د ا ح ب$ قائمة

(نظرية ٧)

بالعمل

وهو المطلوب

تعارين على نظريتي ٢٩ و ٣٠

(مسائل نظرية)

- ١ برهن على أن المربع المنشأ على قطر المربع يساوي ضعف هذا المربع
- ٢ $ا ب ح$ مثلث انزل من $ا$ العمود $ا د$ على القاعدة $ب ح$ فاذا كان الضلع $ح$ أكبر من الضلع $ب$ كان $ح^2 - ب^2 = ح د^2 - ب د^2$
- ٣ اذا فرضت نقطة $م$ داخل المثلث $ا ب ح$ وانزل منها على أضلاعه الأعمدة $م س$ على $ب ح$ $م ص$ على $ا ح$ $م ع$ على $ا ب$ حدث أن $ا ع^2 + ب س^2 + ح ص^2 = ا ص^2 + ب ع^2 + ح س^2$
- ٤ $ا ب ح$ مثلث قائم الزاوية في $ا$ رسمنا مستقيما $س ص$ قاطعا $ا ب$ في $س$ $ا ح$ في $ص$ ثم وصلنا $ح س$ $ب ص$ برهن على أن $ح س^2 + ب ص^2 = ا ص^2 + ح ب^2$
- ٥ في المثلث القائم الزاوية $هـ$ أمثال مجموع مربعي المستقيمين المتوسطين المرسومين من زاويتي الحادتين تساوي $هـ$ أمثال مربع الوتر
- ٦ ارسم مربعا يساوي مجموع مربعين معلومين
- ٧ ارسم مربعا يساوي الفرق بين مربعين معلومين
- ٨ المطلوب تقسيم مستقيم الى قسمين بحيث يكون مربع كل واحد منهما ضعف مربع الآخر
- ٩ المطلوب تقسيم مستقيم الى قسمين بحيث يكون مجموع مربعيهما مساويا مربعا معلوما

(عددية وتخطيطية)

١٠ أى المثلثات الآتية قائم الزاوية

$$(١) ١٤ = ٦^2 - ٨^2 = ٤٨ - ٦٤ = ٥٠ \text{ سنتيمترا}$$

$$(٢) ٤٠ = ٦^2 - ١٠^2 = ٣٦ - ١٠٠ = ٦٤ - ٤١ \text{ سنتيمترا}$$

$$(٣) ٢٠ = ٦^2 - ٩٩^2 = ٣٦ - ٩٨٠١ = ١٠١ - ١٠٠ \text{ سنتيمتر}$$

١١ $ا ب ح$ مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في $ح$ والمطلوب استخراج النتيجة الآتية من

$$ا ب^2 = ا ح^2$$

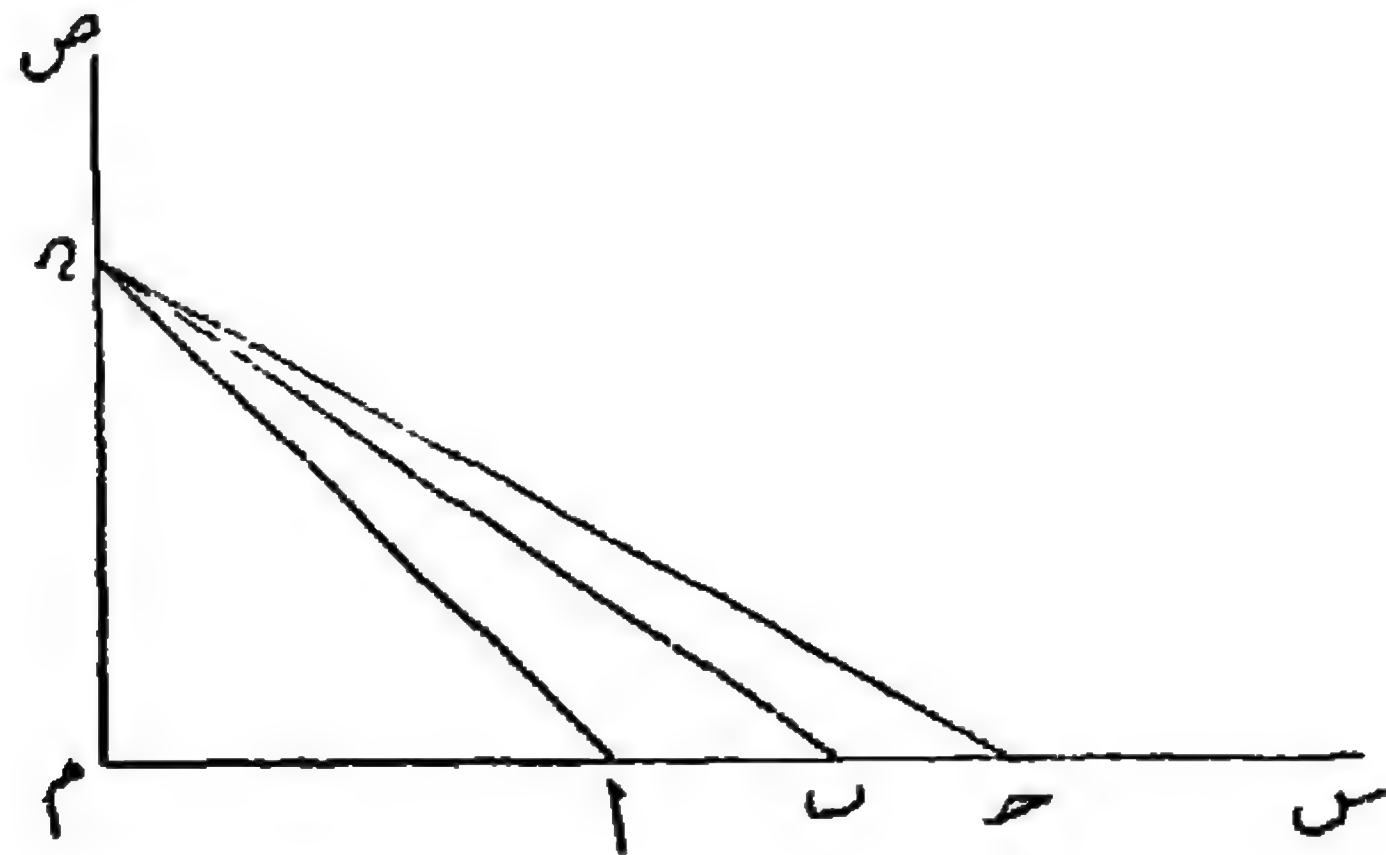
نظرية ٢٩ وهي

وايضاح هذا الناتج بواسطة توصيل قطري المربع المنشأ على $ا ب$ وأحد قطري المربع المنشأ على $ا ح$ واذا كان $ا ح = ب ح = ٥$ سنتيمترات فما طول $ا ب$ الى أقرب مليمترا . جقق الناتج بوضع رسم وقياس $ا ب$

١٢ ارسم مربعا طول قطره ٦ سنتيمترات واحسب طول ضلعه مع تحقيق ذلك بالقياس ثم اوجد المساحة

عملية ١٦

المطلوب رسم المربع الذي مساحته ضعف مساحة مربع معلوم أو ثلاثة أمثاله أو أربعة أمثاله وهكذا
ثم إيجاد المقادير التقريبية لكل من $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{4}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ و $\sqrt{8}$ و $\sqrt{9}$ بطريقتي تخطيطية



لذلك نرسم المستقيمين المتعامدين م س
و م ص ونأخذ على م س البعد م ١
يساوي وحدة ما من وحدات الأطوال وعلى
م ص البعد م ٢ يساوي هذه الوحدة

ونصل م ١

$$٢ = ١ + ١ = \sqrt{١}^2 + \sqrt{١}^2 = \sqrt{٢}^2 \quad \text{فيكون}$$

$$\sqrt{٢} = ١.٤١ \quad \therefore$$

ولايجاد المقدار $\sqrt{٣}$

نأخذ على م س البعد م ٢ = ١.٤١ ونصل م ٢

$$٣ = ٢ + ١ = \sqrt{٢}^2 + \sqrt{١}^2 = \sqrt{٣}^2 \quad \text{فيحدث أن}$$

$$\sqrt{٣} = ١.٧٣$$

ولايجاد المقدار $\sqrt{٤}$

نأخذ على م س البعد م ٣ = ١.٧٣ ونصل م ٣

$$٤ = ٣ + ١ = \sqrt{٣}^2 + \sqrt{١}^2 = \sqrt{٤}^2 \quad \text{فيحدث أن}$$

$$\sqrt{٤} = ٢.٠٠$$

وبقياس كل من الأبعاد ١.٤١ و ١.٧٣ و ٢.٠٠ بغاية الدقة نصل إلى معرفة المقادير $\sqrt{٢}$ و $\sqrt{٣}$ و $\sqrt{٤}$

و بالسير في العمل على هذا النمط نوجد كلا من المقادير $\sqrt{٥}$ و $\sqrt{٦}$ و $\sqrt{٧}$ وهكذا

(تابع التمارين على نظريتي ٢٩ و ٣٠)

١٣ برهن على القانون

$$\text{قطر المربع} = \sqrt{٢} \times \text{ضلعه}$$

ثم أوجد لأقرب سنتيمتر طول قطر المربع الذي طول ضلعه ٥٠ مترا

وضع شكلا لذلك مقياس الرسم فيه سنتيمتر واحد لكل ١٠ أمتار واستخرج الناتج المتقدم بواسطة

قياس القطر

$$\overline{r}r = \varepsilon$$

برهن بالجبر علی أن $r_0 + r_1 = r_2$

$$1 = \sqrt{e - \frac{r}{2}} + \sqrt{e - \frac{r}{2}}$$
$$T_{SA} = T_C = T_{SC} = T_D$$

(رابعاً) $\bar{1} = 40$ ياردة $\bar{6} = 37$ ياردة $\bar{6} = 13$ ياردة

١٩ المسطرتان م س و م ص متعامدتان تنزلق عليهما مسطرة ثالثة ا ب فاذا كان في أحد أوضاعها م ا = ٥,٦ من السنتيمترات و م ب = ٣,٣ من السنتيمترات وفي وضع آخر م ا = ٤ سنتيمترات فأوجد طول م ب بقياسه بعد وضع رسم لذلك واستخرج هذا الطول أيضا بالحساب

٢٠ ا ب ح مثلث قائم الزاوية في ح و ع طول العمود النازل من ح على ا ب برهن على أنه باستخراج مساحة المثلث بطريقتين يحدث أن

$$ع \times ح = ا \times ب$$

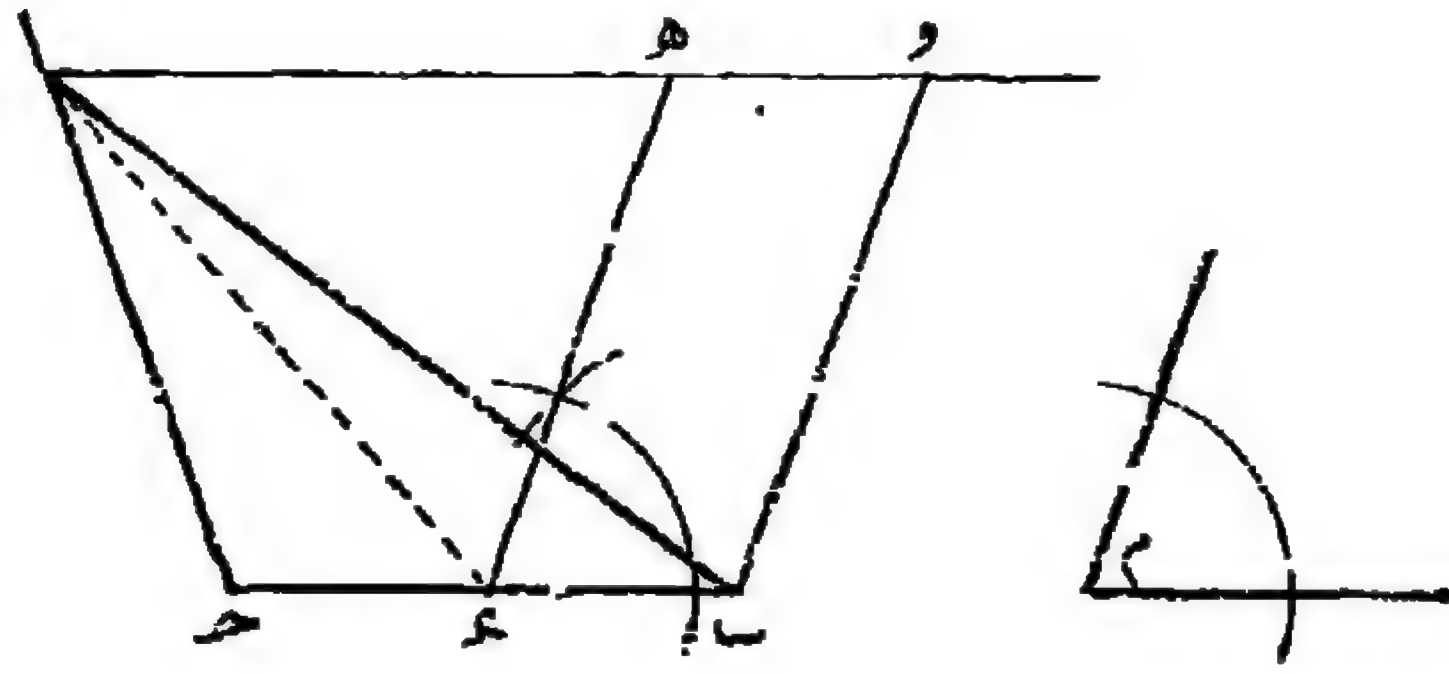
$$\frac{1}{ا} + \frac{1}{ب} = \frac{1}{ع}$$

ومن ذلك استنتج أن

دعاوى عملية على المساحات

عملية ١٧

المطلوب رسم متوازي الأضلاع الذي يكافئ مثلثا معلوما بحيث تكون إحدى زواياه مساوية لزاوية معلومة



نفرض أن ΔABC المثلث المعلوم $\angle M$ الزاوية المعلومة

والمطلوب رسم متوازي الأضلاع الذي يكافئ ΔABC بحيث تكون إحدى زواياه تساوي $\angle M$

العمل - نتصف BC في D ونمد منها المستقيم DE يصنع مع BC زاوية $\angle EDC = \angle M$

ونرسم من A المستقيم AD و DE يوازي BC

ومن B المستقيم BE و DE يوازي BC

فيكون $BCDE$ و متوازي الأضلاع المطلوب

البرهان - نصل AD

من حيث ان ΔABC و ΔADE متحدان في الارتفاع ومرسومان على القاعدتين المتساويتين

BC و DE

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADE$ يكافئ ΔABC

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADE$ ضعف ΔABC

ومن حيث ان $BCDE$ و متوازي الأضلاع بالعمل ويساوي ضعف ΔABC لأنهما متحدان

في القاعدة BC ومحصوران بين المتوازيين BC و DE

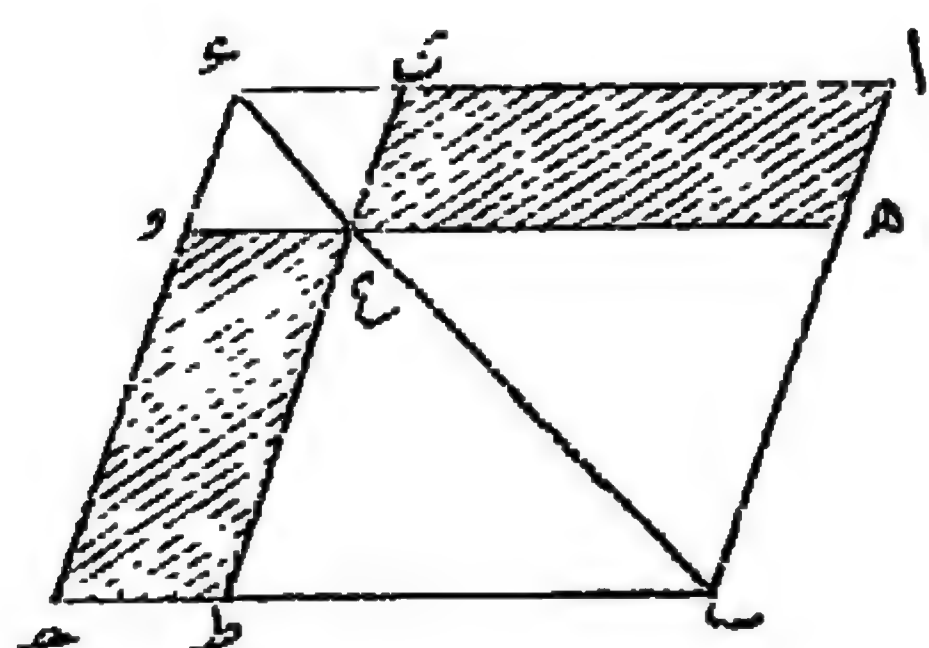
\therefore متوازي الأضلاع $BCDE$ و يكافئ ضعف ΔABC أي يكافئ ΔABC

ومن حيث ان إحدى زوايا متوازي الأضلاع المذكور هي $\angle EDC = \angle M$ الزاوية المعلومة

متوازي الأضلاع المطلوب رسمه هو $BCDE$ و

(تخطيطية)

٢ ارسم متوازي الأضلاع AB AB الذي طول ضاعه $AB = 6$ سنتيمترات $AB = 6$ سنتيمترات
ثم ارسم على القاعدة AB معيناً يكافئ متوازي الأضلاع المذكور



تعريف - في أى شكل متوازي الأضلاع مثل $abcd$ إذا فرضت نقطة e على أحد قطريه bd ومرر بها مستقيمان he و ke بحيث يوازي كل ضلعين فإن الشكل ينقسم الى أربعة أشكال متوازية الأضلاع we و ke و he و de ويقال ان الأولين مرسومان على القطر bd والآخرين المتمان لتوازي الأضلاع المرسومين على القطر المذكور

٣ في شكل التعريف المتقدم برهن بنظرية ٢١ على أن المتممين هـ يـ كـ طـ و متكافئات
وإذا فرض أن طـ و شكل متوازي الأضلاع معلوم وأن عـ يـ مستقيم معلوم فإنه يطلب رسم شكل
متوازي الأضلاع على عـ يـ يكافئ متوازي الأضلاع المعلوم وتكون زواياه مساوية لزوايا هذا المعلوم
٤ المطلوب رسم مستطيل يكافئ آخر معلوما مثل حـ دـ هـ و على شرط أن يكون أحد أضلاعه
مساويا طولا معلوما ا ب

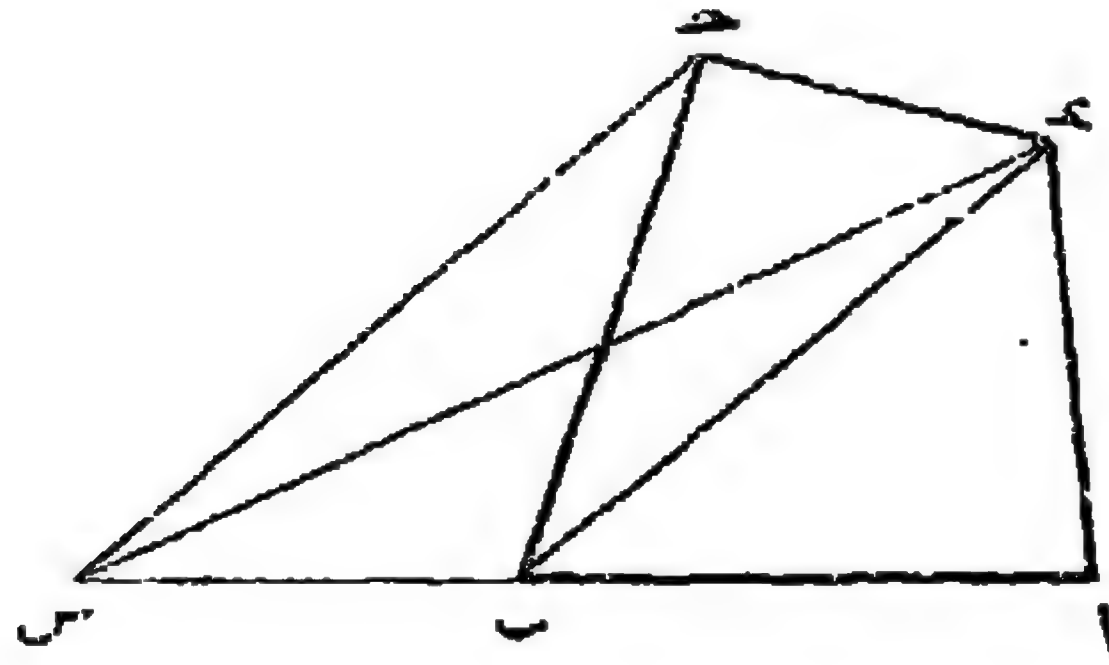
وإذا كان $a = 6$ سنتيمترات $b = 8$ سنتيمترات $c = 3$ سنتيمترات فإنه يطلب إيجاد طول الضلع الثاني للمستطيل بالقياس

٥ ا ب ح د متوازي الأضلاع الذي طول ضلعه ا ب = ٦ سنتيمترات و ا د = ٤,٥ من السنتيمترات و ا ب ح د = ١٥٥° والمطلوب رسم شكل آخر متوازي الأضلاع مساو للأول في الزوايا ومكافئ له وطول أكبر أضلاعه ٧,٥ من السنتيمترات ثم قياس الضلع الأصغر وإذا تغير مقدار الزاوية ا ف ا ب ح د متوازي الأضلاع بالشروط السابقة مقارنة الحالتين واستخلصا نتيجة من هذه المقارنة

٦ المطلوب رسم مستطيل على ضلع طوله ٥ سنتيمترات يكافئ مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه ٦ سنتيمترات ثم إيجاد طول الضلع الثاني للمستطيل بالقياس ومساحته على وجه التقريب بالحساب

عملية ١٨

المطلوب رسم مثلث يكافئ شكلا رباعيا معلوما



نفرض أن $ا ب ح$ د الشكل الرباعي المعلوم

والمطلوب رسم مثلث يكافئ هذا الشكل

العمل — نصل $ب د$

ونرسم من $ح$ المستقيم $ح س$ يوازي $ب د$ ويقابل امتداد $ا ب$ في $س$

نصل $س د$

فيكون $د ا س$ هو المثلث المطلوب

البرهان — من حيث ان المثلثين $س د ب$ و $د ا ب$ على قاعدة واحدة وهي $ب د$ وبين المتوازيين

$ب د$ و $ح س$

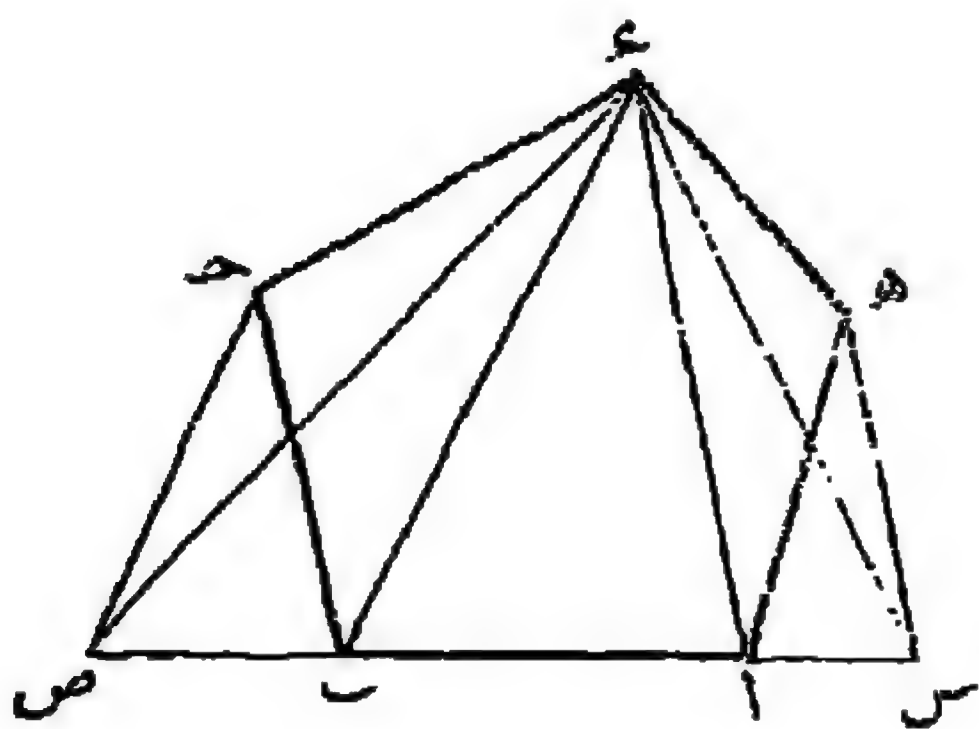
$$\therefore \Delta س د ب = \Delta د ا ب$$

وبإضافة $\Delta ا ب د$ الى كل من طرفي هذه المتساوية يحدث أن $\Delta د ا س =$ الشكل $ا ب ح د$

نتيجة — يؤخذ مما تقدم أنه يمكن تحويل أى شكل كثير الأضلاع الى آخر يكافئه يكون عدد رؤوسه أقل بواحد من عدد رؤوس الأول وبهذه الوساطة يمكن تحويل أى شكل كثير الأضلاع الى مثلث يكافئه

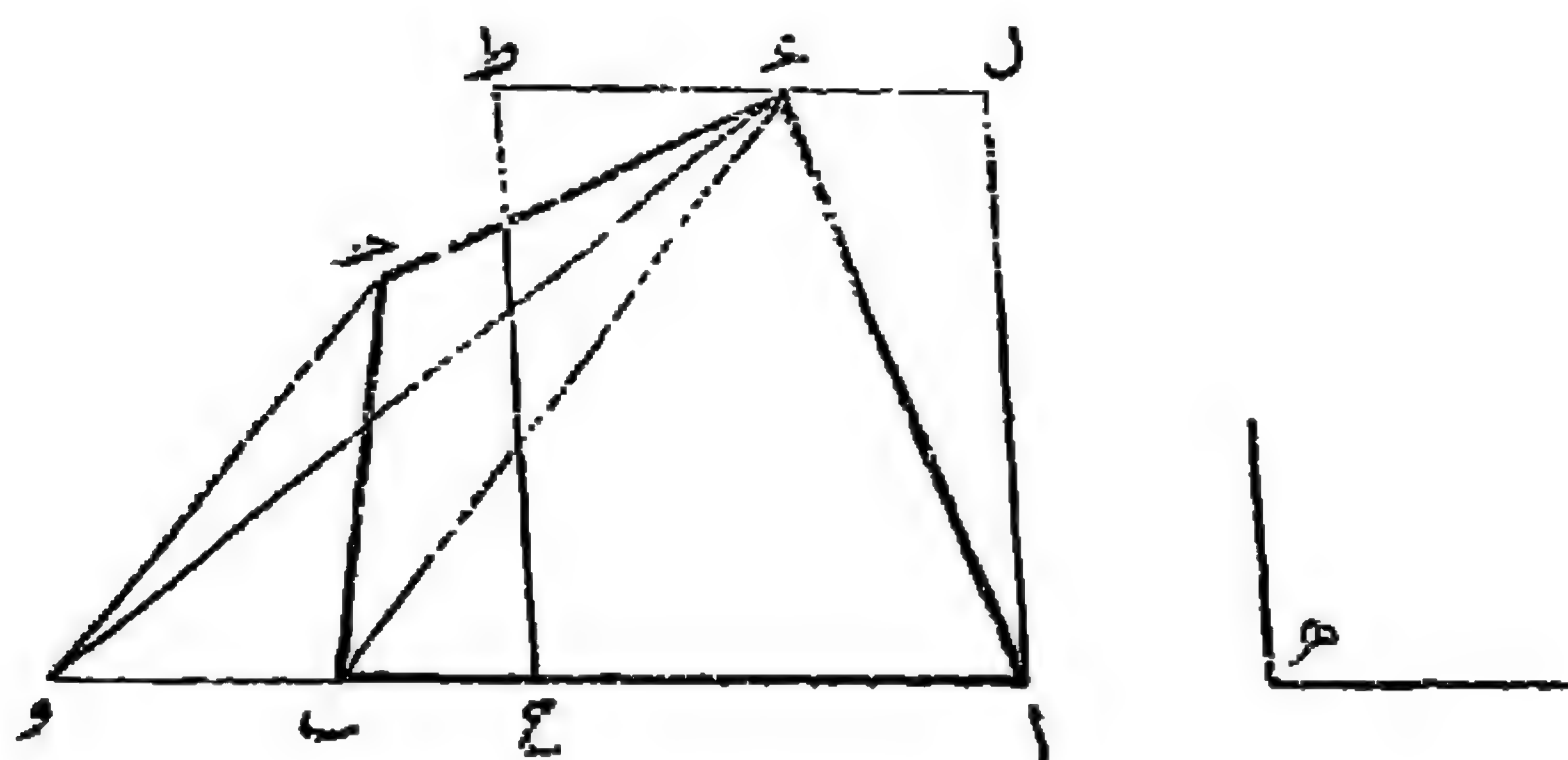
فتلا الشكل الخماسي $ا ب ح د ه$ يكافئ الشكل الرباعي

$ح د س ب$



والشكل الرباعي $ح د س ب$ يمكن تحويله الى المثلث $د س ص$ المكافئ له

المطلوب رسم شكل متوازي الاضلاع يكافئ شكلا كثيرا الاضلاع معلوما بحيث تكون احدى زواياه مساوية لزاوية معلومة



ونرسم من α المستقيم α و يوازي β و يقابل امتداد α في γ ثم نصل γ و δ فالمثلث $\gamma\delta\epsilon$ = الشكل $\alpha\beta\gamma$ (عملية ١٨)

فيكون متوازي الأضلاع $h = l \quad \Delta = 1$

== الشكل ا ب ح د

واحدی زوایاہ $1 \text{ rad} = 57.3^\circ$

تنبيه - اذا كان عدد رؤوس كثير الأضلاع المعلوم أكثر من أربعة فانه يجب أن يحول الى آخر ينقص عنه واحدا في عدد الرؤوس ثم هذا الى آخر كذلك وهكذا حتى يتحول الشكل المعلوم الى مثلث مكافئ له

١ ارسم شكلا رباعيا مثل $ABCD$ فيه $AB = BC = CD = DA = 5$ سم من السنتيمترات

٢ ارسم شكلا رباعيا مثل $ا ب ح د$ فيه $ا ب = ٥,٦$ من السنتيمترات $ب ح = ٦,٤$ من السنتيمترات $ح د = ٦,٦$ من السنتيمترات $د ا = ٧,٢$ من السنتيمترات والقطر $ب د = ٦$ سنتيمترات ثم حول الشكل الى مثلث يكافئه وأوجد من ذلك المساحة التقريبية للشكل

٤ ا ب ح د منزرعة على هيئة شكل رباعي طول ضلعه ا ب = ٤٥٠ مترا 6 ب ح = ٣٨٠ مترا 6 ح د = ٢٣٣٠ مترا 6 ا د = ٣٩٠ مترا وقطره ا ح = ٢٦٠ مترا والمطلوب رسم الشكل المذكور (بقياس سنتيمتر لكل ٥٠ مترا) ثم تحويله الى مثلث يكافئه وايجاد مساحته بعد قياس قاعدة المثلث وارتفاعه

(اذکر حل کل مسأله مع البرهان)

هـ ا ب ح مثلث ك د نقطة مفروضة على قاعدته ب ح أو على امتدادها والمطلوب رسم مثلث يكافئ المثلث ا ب ح على شرط أن تكون قاعدته ب د

۶ ارسم مثلثا ذا ارتفاع معلوم يكافئ مثلثا آخر

٧ ا. ب. ح مثلث ٦ س نقطة ما والمطلوب رسم مثلث يكافئ المثلث ا ب ح على شرط أن تكون س رأسا له وأن تكون قاعدته على استقامة ب ح

٨ ا ب ح د شكل رباعى 6 س نقطة قافروضة على د ح والمطلوب تحويل الشكل
ا ب ح د الى مثلث يكافئه على شرط أن تكون س رأساه وأن تكون قاعدته على استقامة ا ب

٩ بين كيفية تقسيم المثلث الى أجزاء متكافئة عليها ٥ بعد مستقييات من احد رؤوسه

١١ المطلوب تقسيم مثلث معلوم الى ثلاثة أجزاء متكافئة بمستقيمين يمران بنقطة مفروضة على احد أضلاعه

A geometric diagram showing a large triangle with vertices labeled A , B , and C . The base is a horizontal line segment AC with points A , D , E , F , and C marked on it. A point I is located above the base. Solid lines connect I to A , I to B , and I to C . Dashed lines connect I to D , I to E , and I to F . Additionally, solid lines connect B to D and C to F . The diagram illustrates a geometric construction, likely related to the proof of the Ceva's theorem or a similar result.

فيقسم د ح و ط المثلث الى ثلاثة أقسام متكافئة
وللبرهنة على ذلك نصل اه و ا و ا

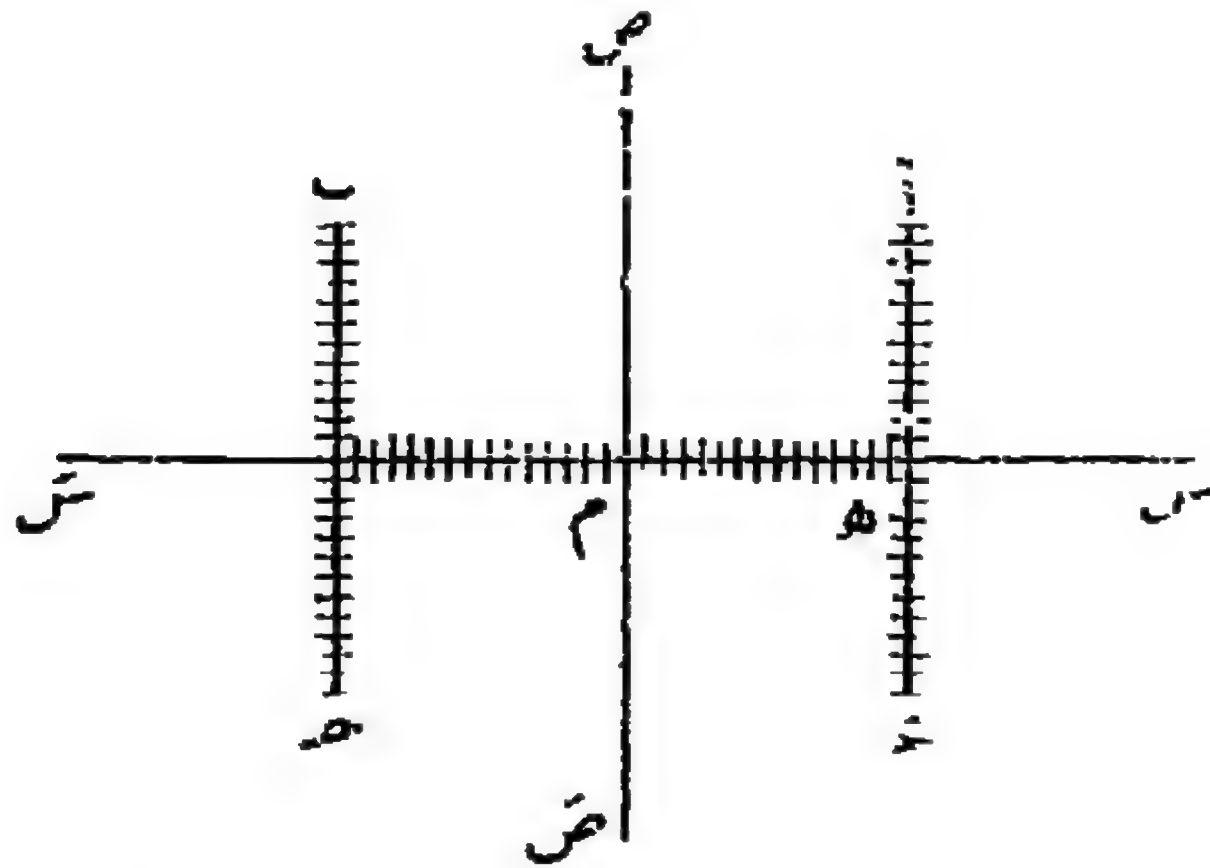
١٣ المعلوم شكل رباعي والمطلوب رسم مستقيم ينصف الشكل المذكور ويمر بأحد رؤوسه (لذلك نحول الشكل الرباعي الى مثلث يكافئه ثم ننصف قاعدة المثلث ونصل رأسه بمتصف القاعدة فينصف هذا المستقيم الشكل الرباعي المعلوم)

١٤ المعلوم شكل رباعي والمطلوب إيجاد ربعه أونحسه أوسدسه أوأى كسر آخر منه برسم مستقيم من أحد رؤوسه

المحوران الاحداثيان والبعدان الاحداثيان

يتعين وضع أى نقطة بالنسبة الى مستقيمين متقاطعين أحدهما عمودى على الآخر متى علم بعدا هذه النقطة عن هذين المستقيمين

فاذا تقاطع مستقيمان $س س$ و $ص ص$ في $م$ وكانا متعامدين وعلم بعد النقطة $ا$ مثلا عن $س س$ وبعدها عن $ص ص$ تعين وضع هذه النقطة بالنسبة الى $س س$ و $ص ص$



ويسمى كل من المستقيمين $س س$ و $ص ص$ بمحور الاحداث ونقطة تقاطعهما $م$ بنقطة الأصل ويعرف المحور $س س$ بمحور السينات والمحور $ص ص$ بمحور الصادات ويرسم عادة محور السينات أفقيا ومحور الصادات رأسيا

فاذا فرضت نقطة مثل $ا$ وأريد تعيين بعديها عن $س س$ و $ص ص$ أنزل منها العمود $ا ه$ على $ص ص$ وطول هذا العمود يدل على بعد النقطة $ا$ عن المحور $س س$ وطول $م ه$ يدل على بعدها عن المحور $ص ص$

ويرمز لبعد أى نقطة مثل $ا$ عن محور الصادات بالرمز $س$

ويرمز لبعدها عن محور السينات بالرمز $ص$

ويقال لهذين البعدين معا البعدان الاحداثيان للنقطة ويرمز لهما هكذا $(س ه ص ه)$

فمثلا اذا أريد تعيين وضع نقطة بعدها الاحداثيان $(١٥ ١٢)$ نجري العمل هكذا

نركز في $م$ ونأخذ على $ص ص$ البعد $م ه = ١٥$ وحده

ونقيم من $ه$ عمودا على $ص ص$ ونأخذ عليه البعد $ه ا = ١٢$ وحده

فتكون $ا$ هي النقطة التي بعدها الاحداثيان $(١٥ ١٢)$

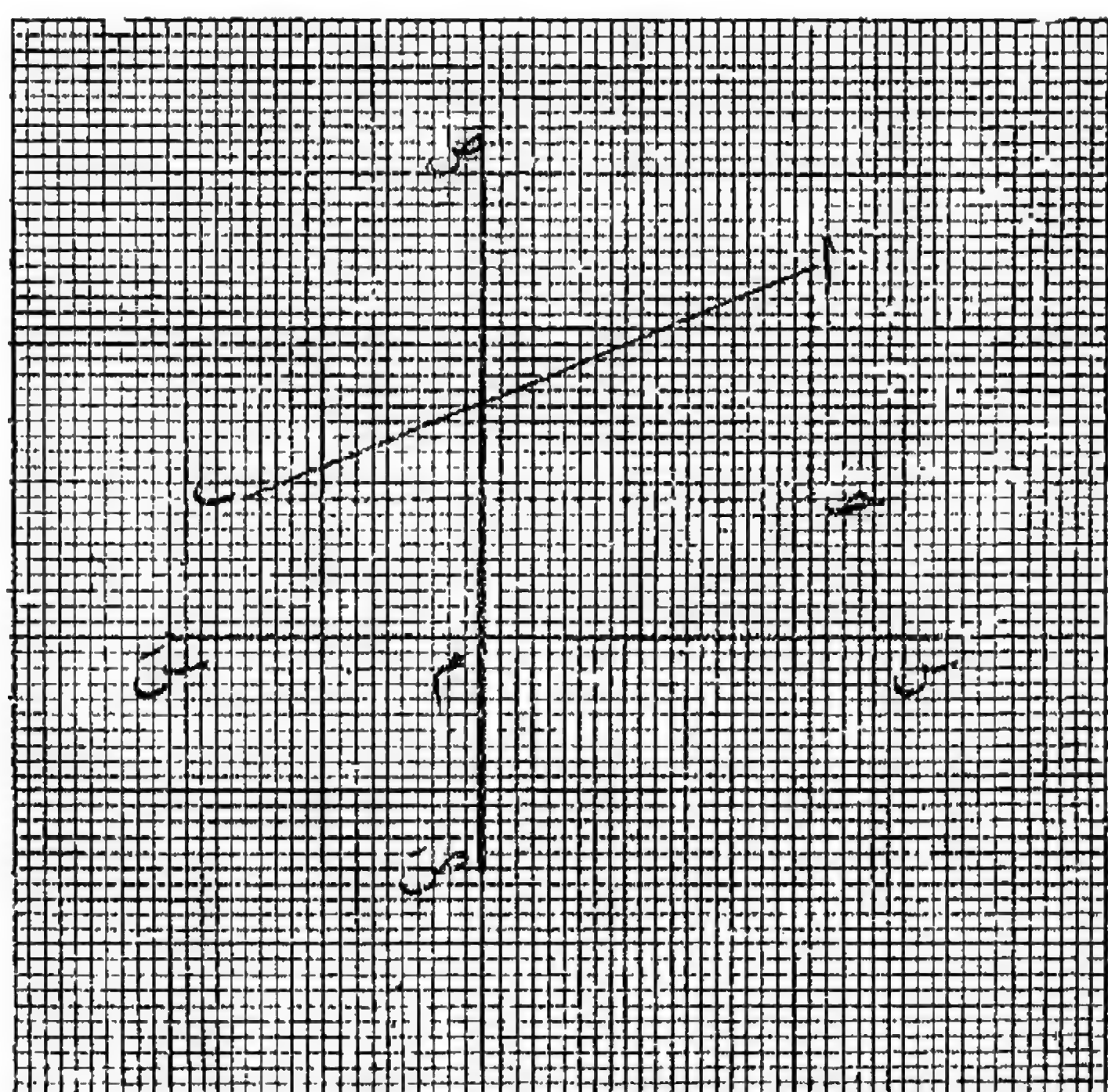
والمحوران الاحداثيان يقسمان مستوى الرسم الى أربعة أقسام هي $س م ص م$ و $ص م س م$ وتعرف هذه الأقسام على ترتيبها المذكور بالربع الأول والثاني والثالث والرابع

ومن حيث انه يمكن أن توجد في كل ربع من الأرباع المذكورة نقطة بعدها الاحداثيان مساويان للبعدين الاحداثيين للنقطة $ا$ أى ١٥ وحده و ١٢ وحده يلزم لمعرفة ما اذا كانت النقطة المراد تعيينها

تعتبر الأبعاد المأخوذة على محور السينات من يمين نقطة الأصل موجبة
وتعتبر الأبعاد المأخوذة على هذا المحور من يسار نقطة الأصل سالبة وتسبق بعلامة —
وتعتبر الأبعاد المأخوذة على محور الصادات موجبة ان كانت فوق محور السينات بأن كانت في الربعين
الأول أو الثاني

وللسهولة في الأعمال التطبيقية يستعمل الورق المنقسم الى مربعات صغيرة في رسم محوران متعامدان متقاطعان في نقطة تعتبر أنها الأصل ويؤخذ طول كل قسم أو أكثر وحدة للطول والورق المستعمل في الأمثلة الآتية منقسم الى مربعات طول ضلع كل منها مليمتر وللتطبيق على ما تقدم نضرب الأمثلة الآتية

الأولى - يعين موضع كل من النقطتين المذكورتين كما هو واضح من الشكل ثم يقاس البعد a
 والثانية - يعين وضع النقطتين كما تقدم
 ثم يرسم من b مستقيم يوازي ss'
 ويمتد حتى يقابل العمود النازل من a' على
 محور السينات في c



فيحدث أن Δ ا ب ح قائم الزاوية
في ح وفيه ب ح = ٣٦ و ا ح = ١٥
ومن حيث ان $\overline{أب} = \overline{أح} + \overline{بح}$
 $\therefore \overline{أب} = \overline{أح} + \overline{بح}$
 $٣٦ = ١٥ + \overline{بح}$

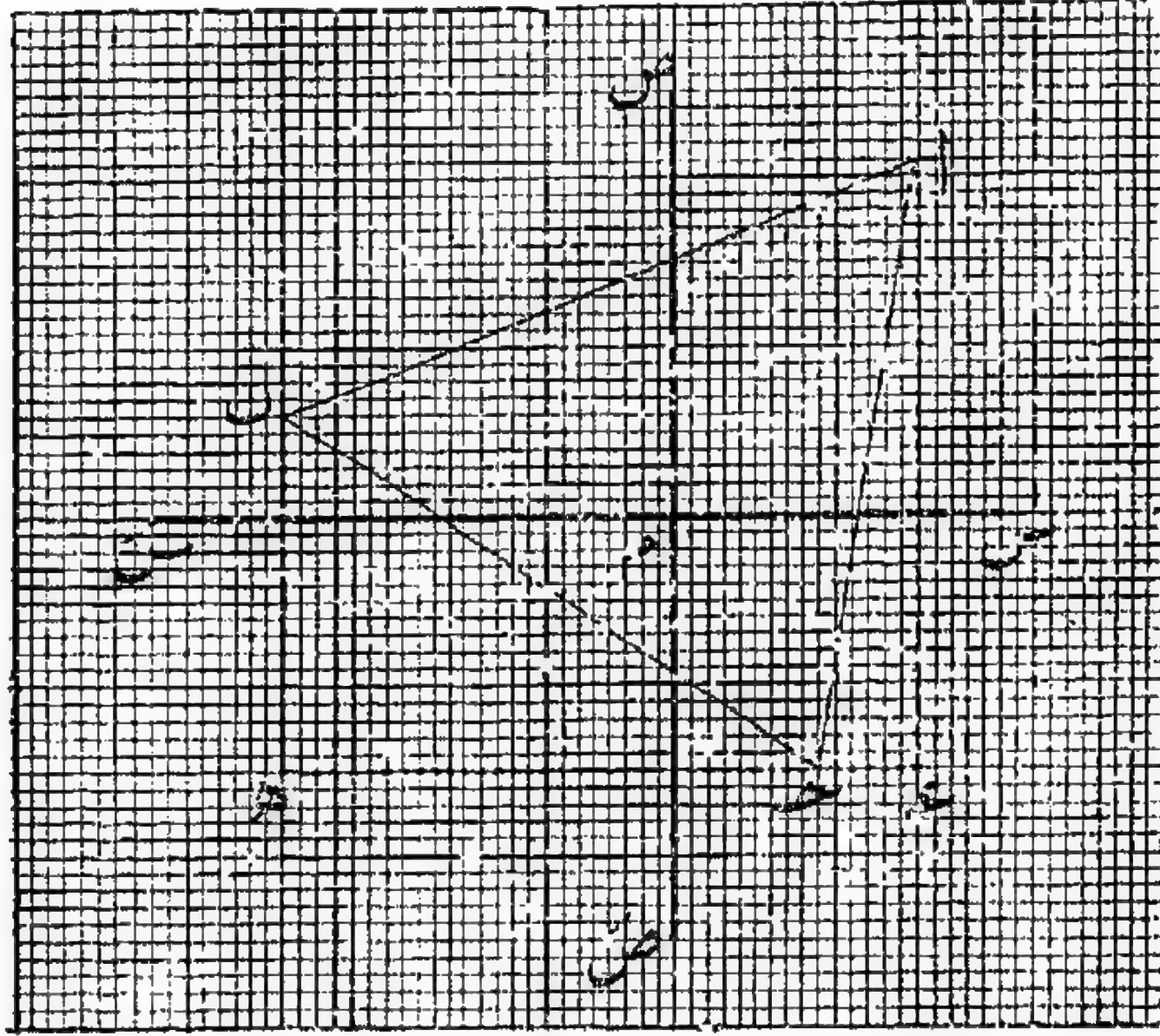
$$220 + 1297 =$$

1021 =

$$29 = 11 \div 2$$

المثال الثاني — البعدان الاحداثيان لكل من النقط ا و ب و ج هما (٢١ ٦ ١٥) و (٦ ٦ ٢٤) (١٥ — ٦ ٩) والمطلوب تعيين هذه النقط الثلاث وايجاد مساحة المثلث الحادث من توصيلها لذلك طريقتان أيضا

الأولى — انه بعد تعيين كل من النقط المذكورة كما هو واضح من الشكل نقيس ا ب وننزل عليه



من ج ارتفاع المثلث ونقيسه ثم نستخرج من ذلك مساحة المثلث التقريبية

والثانية — أن نرسم من ا و ب المستقيمين ا د و ب ه يوازيان س س

ثم نرسم المستقيم د ه مازا بنقطة ج وموازيا س س

فيحدث أن Δ ا ب ج = شبه المنحرف ا د ه ب مطروحا منه المثلثان القائم الزاوية (ا د ج و ب ه ج)

$$\text{أي أن } \Delta \text{ ا ب ج} = \frac{1}{2} \times \text{د ه} \times (\text{ا د} + \text{ب ه}) - \frac{1}{2} \times \text{ا د} \times \text{د ه} - \frac{1}{2} \times \text{ب ه} \times \text{د ه}$$

$$= \frac{1}{2} \times ٣٩ \times ٥٧ - \frac{1}{2} \times ٦ \times ٣٦ - \frac{1}{2} \times ٢١ \times ٣٣$$

$$= ٦٥٧ \text{ وحدة مربعة}$$

تمارين على ورق المربعات

- ١ عين كلا من النقط المبينة احداثياتها في المجاميع الآتية
 أولا (١٢ ٦ ١٨) و (١٢ ٦ ١٨ -) و (١٢ ٦ ١٨ -) و (١٢ ٦ ١٨ -)
 ثانيا (٠ ٦ ٢٤) و (٠ ٦ ٢٤ -) و (٠ ٦ ٢٤ -) و (٠ ٦ ٢٤ -)
 ثالثا (١٥ ٦ ٣٦) و (١٥ ٦ ٣٦ -) و (١٥ ٦ ٣٦ -) و (١٥ ٦ ٣٦ -)
- ٢ عين النقط التي احداثياتها كالآتي وبين بطريقة عملية أن النقط في كل مجموعة على استقامة واحدة ثم برهن على ذلك نظريا
 أولا (٢١ ٦ ٢٧) و (٠ ٦ ٠) و (٢١ ٦ ٢٧ -) و (٢١ ٦ ٢٧ -)
 ثانيا (٢١ ٦ ٢٧ -) و (٠ ٦ ٠) و (٢١ ٦ ٢٧ -) و (٢١ ٦ ٢٧ -)
- ٣ عين تقطعي كل مجموعة من المجموعتين الآتيتين
 أولا (٢١ ٦ ٣٦) و (٩ ٦ ١٢)
 ثانيا (١٢ ٦ ١٥) و (٤٨ ٦ ٤٥)
- ثم صل بين تقطعي كل مجموعة بمستقيم وقس البعدين الاحداثيين لنقطة منتصفه وبين السبب في أن البعد الأفقي لنقطة التنصيف المذكورة يساوي نصف مجموع البعدين الاقبيين للنقطتين الواصل بينهما المستقيم الذي نصف وأن البعد الرأسى لهذه النقطة يساوي نصف مجموع البعدين الرأسيين للنقطتين المذكورتين
- ٤ عين تقطعي كل مجموعة وصل بينهما بمستقيم وأوجد البعدين الاحداثيين لنقطة منتصفه
 أولا (٠ ٦ ٠) و (٣٠ ٦ ٢٤) | ثالثا (٠ ٦ ٠) و (٣٠ ٦ ٢٤ -)
 ثانيا (٠ ٦ ٢٤) و (٣٠ ٦ ٠) | رابعا (٠ ٦ ٢٤ -) و (٣٠ ٦ ٠ -)
- ٥ المطلوب تقسيم المستقيم الواصل بين (٠ ٦ ٠) و (٤٥ ٦ ٥٤) الى ثلاثة أقسام متساوية وإيجاد البعدين الاحداثيين لكل من نقط التقسيم المذكور
- ٦ عين النقط المبينة احداثياتها في المجموعتين الآتيتين
 أولا (٠ ٦ ١٥) و (٦ ٦ ١٥) و (١٥ ٦ ١٥) و (٣ ٦ ١٥) و (١٢ ٦ ١٥)
 ثانيا (٢٤ ٦ ١٢ -) و (٢٤ ٦ ٣ -) و (٢٤ ٦ ٠) و (٢٤ ٦ ٩) و (٢٤ ٦ ١٨)
- وبين أن نقط المجموعة الأولى توجد على مستقيم يوازي محور الصادات وأن نقط المجموعة الثانية على مستقيم يوازي محور السينات ثم أوجد بعدى الاحداث لنقطة تقاطع هذين المستقيمين

٧ عين كلا من النقط الآتية واستخرج بالحساب بعد كل منها عن نقطة الأصل ثم حققه بالقياس

أولا	(٢٤ ٦٤٥)	ثالثا	(٢,١ ٦٧,٢) ^{سنتيمتر}
ثانيا	(٢٤-٦٤٥-)	رابعا	(٧,٢ ٦٢,١-)

٨ عين نقطتي كل مجموعة من المجاميع الآتية واستخرج بالحساب البعد بينهما ثم حققه بالقياس

أولا	(٠.٦١٢) و (٩٦.٠)	رابعا	(١٢٦.٣٠) و (٣٦ ٦١٥-)
ثانيا	(٢٤٦.٢٧) و (١٥٦.١٥)	خامسا	(٣٦ ٦٠) و (٠.٦٤٥-)
ثالثا	(٠.٦٤٥) و (٢٤٦.٠)	سادسا	(٢٧ ٦٠) و (٩-٦٤٥-)

٩ بين أن النقط (٦٦٩-) و (٣٠٦٩) و (٦٦٢١) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين

ثم استخرج بالحساب طول كل من ساقيه وحقق الناتج بالقياس

١٠ عين النقط العمانية الآتية (١٥٦٠) و (١٢٦٩) و (٠.٦١٥) و (٩-٦١٢) و (٠.٦١٥-) و (١٥-٦٠) و (٩٦١٢-) و (٩-٦١٢-) ثم بين أنها واقعة على محيط دائرة مركزه نقطة الأصل

١١ بين بالرسم سبب تساوي البعدين كل نقطتين في كل من المجاميع الآتية

أولا	(٠.٦١) و (٠.٦٠)
ثانيا	(٠.٦٠) و (١٦.٠)
ثالثا	(٠.٦٠) و (٠.٦١)

١٢ ارسم المستقيمين الواصلين بين

أولا	(٠.٦١) و (١٦.٠)
ثانيا	(٠.٦٠) و (١٦.١)

واثبت أن هذين المستقيمين متعامدان وأن كلا منهما ينصف الآخر

١٣ بين أن النقط (١٢٦٠) و (٢٧ ٦٣٦) و (١٢-٦٣٦) هي رؤوس مثلث متساوي

الساقين وأن محور السينات ينصف قاعدة هذا المثلث

١٤ النقط (٠.٦٤٢) و (٣٠.٦٤٢) و (٣٠.٦٠) هي رؤوس ثلاثة لمستطيل والمطلوب تعيين

رأسه الرابع وإيجاد البعدين اللاحداثيين لنقطة تقاطع قطريه

١٥ برهن على أن النقط الأربع (٠ ٦ ٠) و (٠ ٦ ٣٩) و (٣٦ ٦ ٥٤) و (٣٦ ٦ ١٥) هي رؤوس معين وأوجد طول ضلعه والبعدين الاحداثيين لنقطة تقاطع قطريه

١٦ عين المحل الهندسى لنقطة تتحرك على شرط أن يكون بعدها عن النقطتين (٠ ٦ ٠) و (١٢ ٦ ١٢) دائماً متساويين ثم عين تقاطع المحل الهندسى المذكور بالمحورين الاحداثيين

١٧ بين أن النقط الأربع فى كل من المجاميع الآتية هي رؤوس مستطيل ارسمه واستخرج مساحته بالحساب

أولا (٩ ٦ ١٢) و (٩ ٦ ٥١) و (٣٦ ٦ ٥١) و (٣٦ ٦ ١٢)
ثانيا (٦ ٦ ٩) و (٩ ٦ ٤٥) و (٤٥ ٦ ١٨) و (٦ ٦ ١٨)
ثالثا (٣ ٦ ١٥) و (٣ ٦ ٢٤) و (٢٤ ٦ ٢٤) و (٢٤ ٦ ١٥)

١٨ صل على الترتيب بين النقط (٠ ٦ ٣) و (٣ ٦ ٠) و (٠ ٦ ٣) و (٣ ٦ ٠) وبين نوع الشكل الرباعى الحادث مع تعيين مساحته ومساحة الشكل الحادث من وصل منتصفات أضلاعه على الترتيب

١٩ ارسم المثلثات التى رؤوسها النقط الآتية ثم أوجد مساحة كل منها

أولا (٣ ٠ ٦ ٣٠) و (٠ ٦ ١٢) و (٠ ٦ ٥٤)
ثانيا (٣ ٠ ٦ ٣٠) و (٠ ٦ ١٢) و (٠ ٦ ٥٤)
ثالثا (٣ ٠ ٦ ٣٠) و (٠ ٦ ١٢) و (٠ ٦ ٥٤)
رابعا (٣ ٠ ٦ ٣٠) و (٠ ٦ ١٢) و (٠ ٦ ٥٤)

٢٠ ارسم المثلثين اللذين رؤوسهما النقط الآتية ثم أوجد مساحتهما وقس درج زوايا المثلث الأول

أولا (٠ ٦ ٠) و (٩ ٦ ١٥) و (٠ ٦ ١٨)
ثانيا (٠ ٦ ٠) و (٠ ٦ ٩) و (١٨ ٦ ٠)

٢١ ارسم المثلثات التى رؤوسها النقط الآتية ثم بين أن فى كل مثلث ضلعا يوازي أحد المحورين وبذلك أوجد مساحة كل منها

أولا (٠ ٦ ٠) و (٣ ٠ ٦ ٣٦) و (١٨ ٦ ٣٦)
ثانيا (٠ ٦ ٠) و (٢٤ ٦ ١٥) و (٢٤ ٦ ٤٥)
ثالثا (٠ ٦ ٠) و (٣ ٦ ٣٦) و (٢٤ ٦ ٣٦)
رابعا (٠ ٦ ٠) و (٢٤ ٦ ١٨) و (٢٤ ٦ ٦٠)

٢٢ بين أن في كل مثلث من المثلثات الآتية ضلعين يوازيان المحورين الاحداثيين ثم أوجد مساحة كل منها

أولا (١٥٦١٥) و (١٥٦٤٥) و (٤٥٦٤٥) | ثالثا (٢٤٦١٢) و (١٢-٦٤٨) و (١٢-٦١٢)
ثانيا (٩٦٢٤) و (٥٤٦٢٤) و (٥٤٦٠) | رابعا (٤٥٦٣) و (٤٥٦٣٣) و (٢١-٦٣)

٢٣ بين أن (١٥٦١٥-) و (٣٠٦٢١) و (٣٠٦٣٠) و (١٨٦٣٠) و (٣٦٦-) هي رؤوس شكل متوازي الأضلاع وأوجد طول كل من أضلاعه ومساحته

٢٤ بين أن النقط الأربع في كل من المجاميع الآتية تحدث شبه منحرف وأوجد مساحته

أولا (٠٦٩) و (٩٦٩) و (٠٦٢٧) و (١٨٦٢٧)
ثانيا (٩٦٠) و (٩٦١٥-) و (٩٦٦-) و (٩-٦٠)
ثالثا (١٢٦٢٤) و (١٢٦١٢) و (٣-٦٣٣) و (٣-٦٩)
رابعا (٠٦٠) و (١٥٦٣-) و (١٥٦١٢-) و (٠٦٢٤-)

٢٥ أوجد مساحة المثلث الحادث من وصل النقط الثلاث في كل من المجاميع الآتية

أولا (١٥٦١٥) و (٣٠٦٦٠) و (٤٢٦٣٦)
ثانيا (١٨٦٢١) و (١٢٦٣٠-) و (٩-٦١٢-)
ثالثا (١٨-٦٠) و (٩-٦٠) و (١٥٦٤٢)
رابعا (١٢٦١٨) و (١٢-٦٢١-) و (٤٥-٦٦-)

٢٦ بين أن (٠٦١٥-) و (١٥٦٢١) و (٠٦٥٧) و (١٥-٦٢١) رؤوس معين وأوجد طول ضلعه ومساحته

٢٧ صل على الترتيب بين النقط (١٥-٦٠) و (٠٦٣٦) و (١٨٦١٢) و (٩-٦٢٤-) ثم استخرج بالحساب أطوال المستقيمت الثلاث الأولى وقس طول المستقيم الرابع ثم أوجد مساحة الجزء من الشكل الواقع في الربع الأول وجرئه الواقع في الربع الرابع

٢٨ البعدان الاحداثيان للنقط ا ب ج د هما (١٢-٦١٢) و (١٢٦٣٠-) و (٣٩٦٣٠-) و (١٥٦١٥)

والمطلوب حساب أطوال ا ب ج د و قياس ا د وحساب مساحة ا ب ج د باعتبار أنه يساوى الفرق بين مثلثين

٢٩ ارسم شكلا رؤوسه على الترتيب (٦٠ - ٩) و (٩ ٦ ٢٤) و (٢٤ ٦ ١٢) و (٩ ٦ ١٢) و (٦٠ - ٩) ثم قسمه الى ثلاثة مثلثات قائمة الزوايا ومن ذلك استخراج مساحته مع ايجاد أطوال أضلاعه

٣٠ مزرعة على هيئة مثلث مثل ا ب ح رسم على ورق المربعات (بمقياس ٣ سنتيمترات لكل ١٠٠ متر) فوجد فى الرسم المذكور أن البعدين الاحداثيين لكل من النقط ١ ٦ ب ٦ ح هما على الترتيب (٩ - ٦ ٣) و (٩ ٦ ٩) و (١٢ ٦ ٩) و (١٥ - ٦ ٦ - ٦) من السنتيمترات مامساحة المزرعة وما طول ضلعها الدال عليه ب ح فى الرسم وما مقدار البعد بين هذا الضلع ورأس المزرعة المقابل له

٣١ بين أن النقط (٠ ٦ ١٨) و (١٨ ٦ ٠) و (٦ ٠ ٦ ٤٢) و (٤٢ ٦ ٠) هى رؤوس مربع قس ضلعه واستخرج من ذلك مساحته التقريبية ثم احسب المساحة بالضبط

وذلك (أولا) برسم مربع آخر أضلاعه تمر برؤوس المربع الأول المعلوم

(وثانيا) بتقسيم المربع المعلوم بالكيفية التى انقسم بها المربع فى الشكل الأول الذى فى صفحة ١٢٩

(مسائل متنوعة)

١ إذا كان $أ ب ح$ مثلثا ضلعاه $أ ب$ و $أ ح$ غير متساويين وكان $أ س$ المستقيم المتوسط الممدود من $أ$ و $أ م$ منصف الزاوية $ب أ ح$ و $أ د$ العمود النازل من $أ$ على $ب ح$ لزم أن يقع $أ م$ بين $أ د$ و $أ س$ وأن ينحصر مقداره بينهما

٢ إذا أنزلنا من إحدى نهايتي قاعدة مثلث عمودا على منتصف زاوية الرأس فأن هذا العمود أولا يصنع مع أى ضلع من الضلعين المحيطين بالزاوية زاوية تساوى نصف مجموع زاويتي القاعدة وثانيا يصنع مع القاعدة زاوية تساوى نصف الفرق بين هاتين الزاويتين

٣ فى أى مثلث الزاوية المحصورة بين منتصف زاوية الرأس والعمود النازل من هذا الرأس على القاعدة تساوى نصف الفرق بين زاويتي القاعدة

٤ ارسم مثلثا قائم الزاوية علم منه الوتر والفرق بين ضلعى القائمة

٥ ارسم مثلثا علمت قاعدته وفرق زاويتيها وفرق الضلعين الآخرين أو مجموعهما

٦ ارسم مثلثا متساوى الساقين علمت قاعدته ومجموع أحد الساقين مع الارتفاع النازل من الرأس على القاعدة

٧ المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى جزأين على شرط أن يكون المربع المنشأ على أحدهما مكافئا مثل المربع المنشأ على الجزء الآخر

٨ $أ ب ح د$ متوازى الأضلاع $أ م$ نقطة ما خارجة عن الزاوية $ب أ د$ وعن التى تقابلها بالرأس والمطلوب البرهنة على أن المثلث $أ م ح$ يكافئ مجموع المثلثين $أ م د$ و $أ م ب$

وإذا وقعت $م$ بين ضلعى الزاوية $ب أ د$ أو بين ضلعى التى تقابلها بالرأس كان المثلث $أ م ح$ مكافئا الفرق بين المثلثين $أ م د$ و $أ م ب$

٩ إذا ساوى ضلعان من مثلث قطرى شكل رباعى وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعى المثلث مساوية لاحدى الزاويتين المحصورتين بين القطرين كان المثلث مكافئا الشكل الرباعى

١٠ المطلوب إيجاد المحل الهندسى لنقطة تقاطع المستقيمتين المتوسطة للثلثات المتكافئة المرسومة على قاعدة معلومة

١١ المطلوب رسم مثلث على قاعدة مثلث آخر معلوم على شرط أن يكافئه وأن يكون رأسه على مستقيم معلوم

١٢ $أ ب ح د$ شكل متوازى الأضلاع مكونة أضلاعه من قضبان مرتبطة بعضها ببعض ارتباطا مفصليا فإذا كان الضلع $أ ب$ ثابتا لا يتحرك فما هو المحل الهندسى لمنتصف $د ح$

الجزء الثالث

الجزء الثالث

الدائرة

تعريف ومبادئ أولية

١ الدائرة هي شكل مستو محاط بخط حادث من حركة نقطة على بعد واحد دائماً من نقطة أخرى ثابتة تسمى المركز والخط الذي يحيط بالشكل يسمى محيط الدائرة

تنبيه — الدائرة على هذا التعريف هي السطح الذي يحدده المحيط وكثيراً ما يطلق لفظ الدائرة ويراد به المحيط وذلك عند أمن اللبس

٢ نصف قطر الدائرة مستقيم خارج من المركز وامتده بالمحيط وينتج من هذا أن جميع أنصاف الاقطار لدائرة واحدة متساوية

٣ قطر الدائرة مستقيم ماز بالمركز وطرفاه على المحيط

٤ نصف الدائرة هو شكل محدود بقطر الدائرة وجزء المحيط المنتهى بطرفي هذا القطر وسياتي البرهان في صفحة ١٥٧ على أن القطر يقسم الدائرة الى قسمين ينطبق أحدهما على الآخر تمام الانطباق

٥ اذا اشتركت عدة دوائر في مركز واحد سميت متحدة المركز

وينتج من هذه التعاريف

(أولاً) ان الدائرة محاطة بخط منحن مقفل فاذا قطع مستقيم محيطها في نقطة ما فانه يقطعه في نقطة أخرى اذا مد على استقامته

(ثانياً) بعد أى نقطة عن مركز الدائرة أكبر من نصف القطر أو أصغر منه على حسب كون النقطة خارج الدائرة أو داخلها

(ثالثاً) تكون النقطة خارج الدائرة أو داخلها على حسب كون بعدها عن المركز أكبر من نصف القطر أو أصغر منه

(رابعاً) تنطبق الدائرتان كل على الأخرى تمام الانطباق اذا تساوى نصفاهما قطريهما لأنه اذا وقع مركز احدهما على مركز الأخرى فان جميع نقط المحيط الأول تقع على جميع نقط المحيط الثاني

(خامساً) الدوائر التي تختلف أنصاف أقطارها في الطول لا يمكن أن تتقاطع اذا اتحدت في المركز لأن بعد كل نقطة على محيط الدائرة الصغرى عن المركز أصغر من بعد كل نقطة على محيط الدائرة الكبرى عن هذا المركز

(سادسا) اذا اشتراك محيطا دائرتين في نقطة لا يمكن أن تتحدا في المركز إلا اذا انطبق محيطاهما كل على الآخر تماما

٦ قوس الدائرة جزء من محيطها

٧ وتر الدائرة مستقيم واصل بين أى نقطتين على المحيط

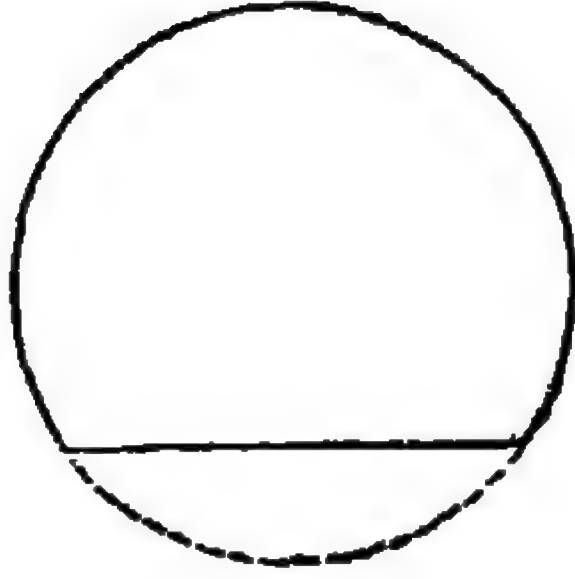
تنبيه — ينتج من هذه التعاريف أنه اذا لم يمر وتر الدائرة بمركزها

فانه يقسم المحيط الى قوسين غير متساويين أحدهما

أكبر من نصف المحيط والآخر أصغر منه ويطلق

على الأول القوس الأكبر والثاني القوس الأصغر

والاثنين معا القوسان المتراققان



التماثل في الدائرة

يسهل البرهنة على بعض الخواص الأولية للدائرة باعتبار خواص التماثل ولذلك نورد هنا التعريف المتقدم
كره في صفحة ٢٣

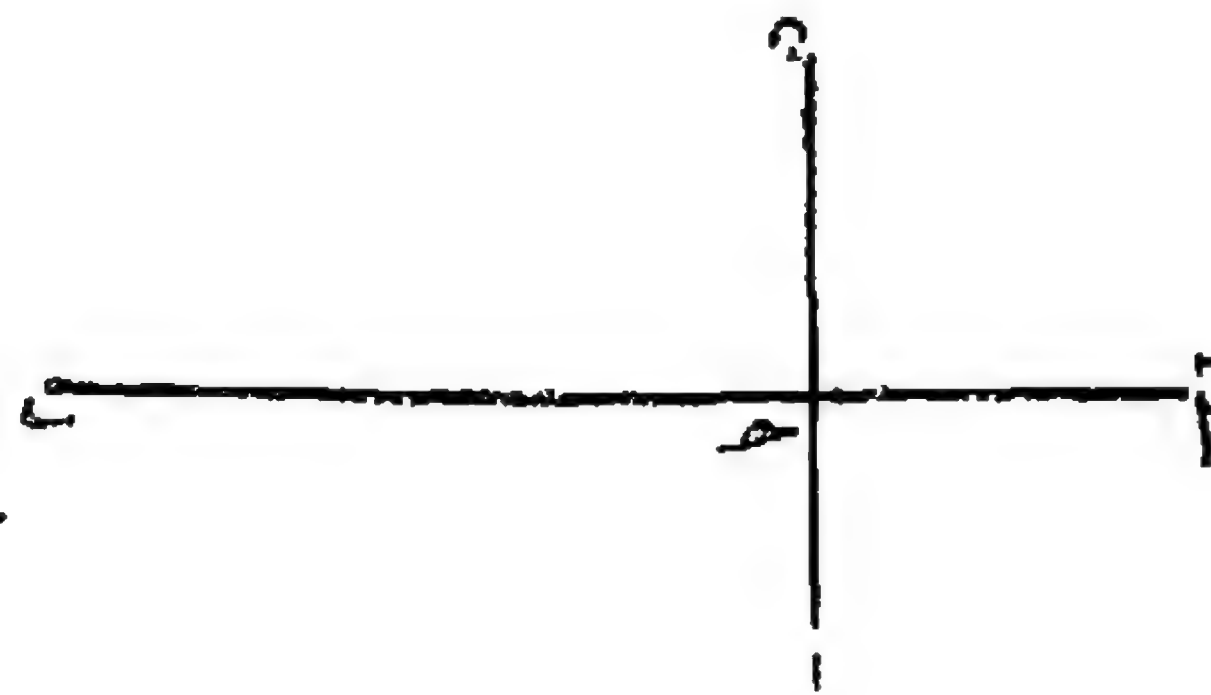
تعريف ١ — يقال ان في الشكل تماثلا بالنسبة الى خط معلوم فيه متى أمكن طي الشكل بحيث ينطبق جزاءه اللذان يفصلهما ذلك الخط كل على الآخر

ويسمى المستقيم الذي يقسم الشكل الى جزأين متماثلين محور التماثل

ومن الواضح أن هذا الانطباق لا يتأتى إلا اذا اتحد الجزاءان المتقابلان مساحة وشكلا وتماثلا في وضعهما

بالنسبة الى محور التماثل

تعريف ٢ — اذا فرض أن AB مستقيم وأن C نقطة خارجة عنه



وانزل من C العمود CD على AB ثم مد على استقامته وأخذ على امتداده البعد $CD = CE$ ثم طوى الشكل بحيث ينطبق جزاءه كل على الآخر عند AB فان النقطة C تقع على النقطة D

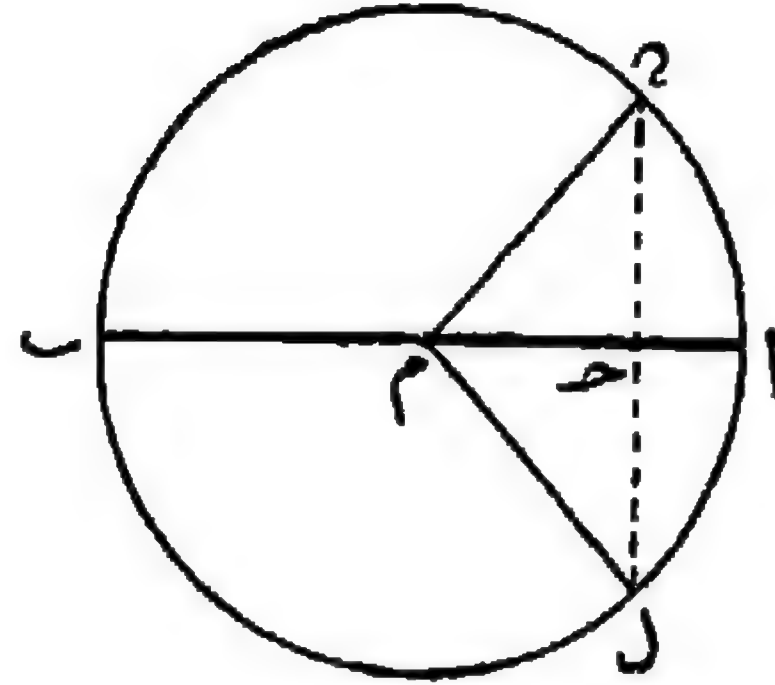
لأن $AD = AC = CE = CB$ و $CD = CE$ و $CD = CE$

ويقال للنقطتين C و D انهما متماثلتا الوضع بالنسبة الى المحور وأن كلا منهما صورة للأخرى أو مماثلة لها بالنسبة الى المحور

تنبيه — النقطة ومماثلتها على بعدين متساويين عن أى نقطة على المحور (راجع عملية ١٤ صفحة ٩٦)

بعض خواص التماثل في الدوائر

١ قطر الدائرة يقسمها الى جزأين متماثلين



إذا فرضنا أن AB قطر لدائرة مركزها M

فانه يطلب اثبات أن هذا القطر يقسمها الى جزأين متماثلين

البرهان — نمد من M نصفى القطرين MC و MD كل في جهة من AB بحيث تكون الزاويتان $\angle CMA$ و $\angle DMA$ متساويتين

فاذا طبقنا جزء الدائرة AC على الجزء AD حول A فان M ينطبق على D لأن $\angle CMA = \angle DMA$ عملاً وتقع النقطة C على النقطة D لأن $MC = MD$

وبهذه الطريقة يمكن إثبات أن أى نقطة من نقط القوس AC تقع على أخرى من القوس AD وبذلك ينطبق جزء المحيط كل على الآخر

∴ قطر الدائرة يقسمها الى جزأين متماثلين

نتيجة — إذا فرضنا أن CD يقطع AB في H فمن حيث انه عند تطبيق جزأى الدائرة المتماثلين تقع نقطة C على D ينتج أن CH ينطبق على DH

$$\therefore CH = DH$$

$$6 \quad \angle CMA = \angle DMA \quad \angle CHM = \angle DHM$$

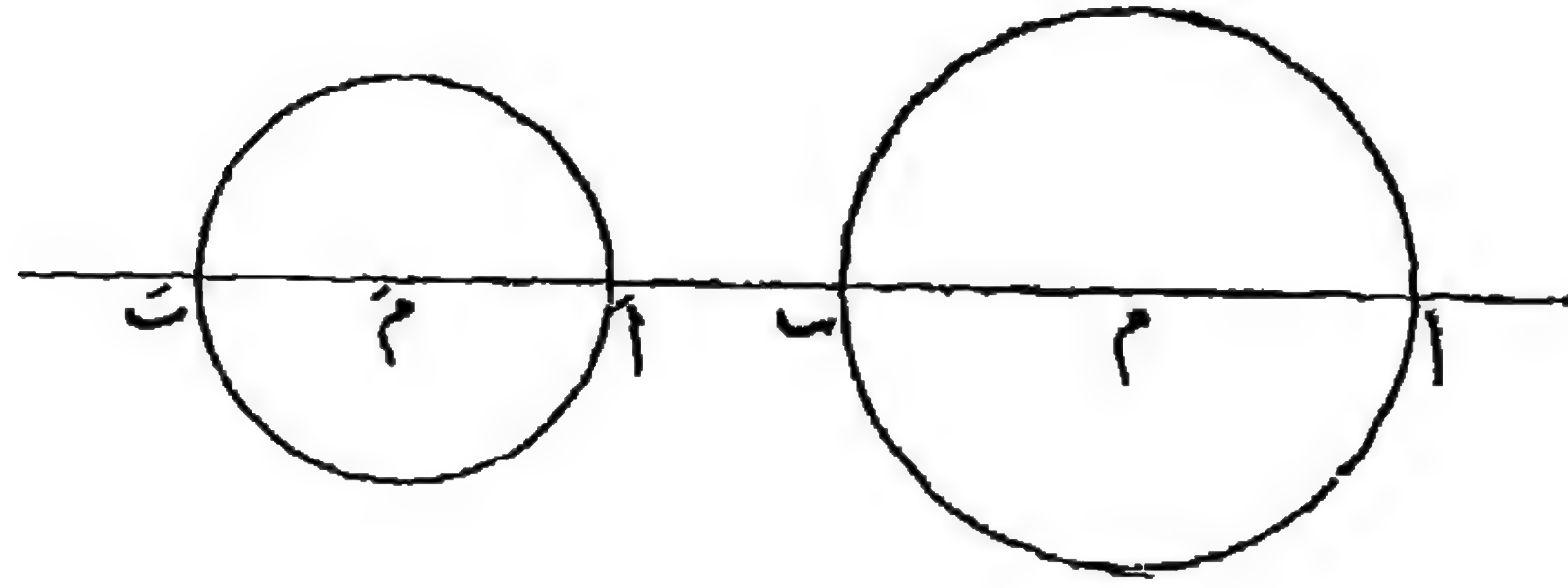
ومن حيث انهما متجاورتان فكل منهما قائمة

∴ $\angle CHM = \angle DHM$ متماثلتا الوضع بالنسبة الى AB

وعلى ذلك يمكن أن يقال بالعكس اذا مر محيط دائرة بنقطة ما فانه لابد أن يمر بمائلتها بالنسبة الى قطر ما

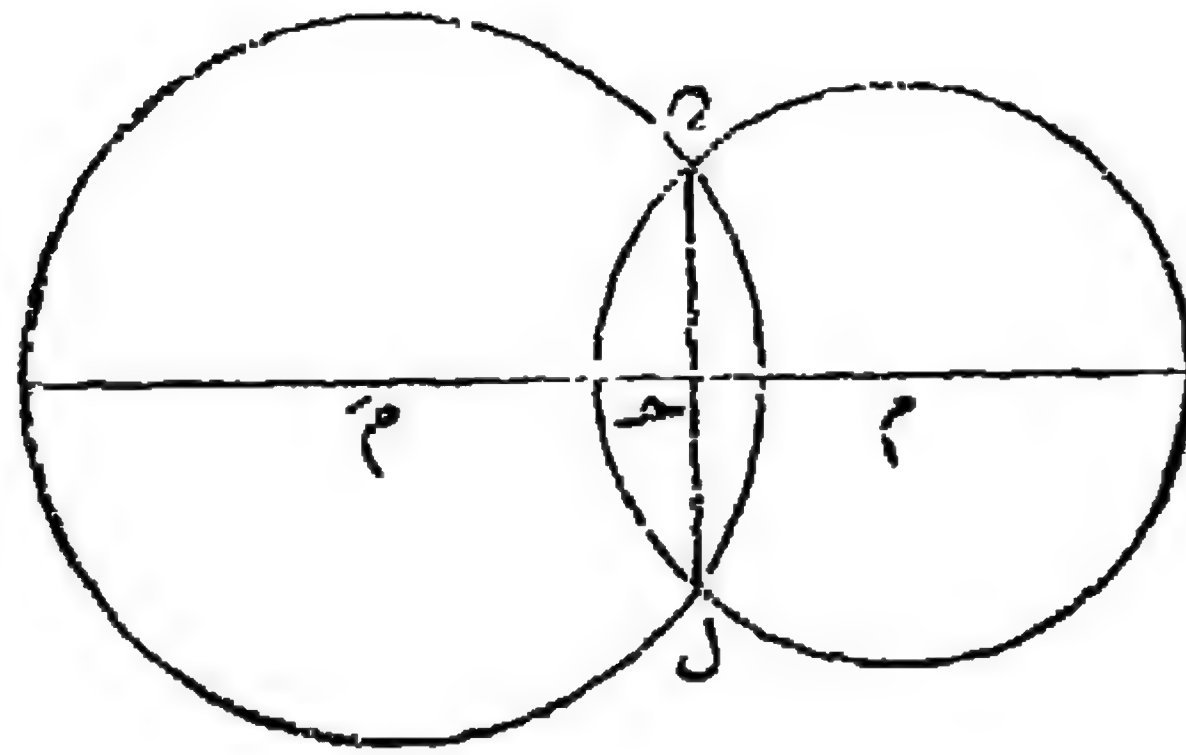
تعريف — المستقيم الواصل بين مركزي دائرتين يسمى خط المركزين

٢ خط المركزين يقسم الدائرتين الى جزأين متماثلتين



نفرض أن $م$ و $م'$ مركزا دائرتين وأن المستقيم المار بالنقطتين $م$ و $م'$ يقطع المحيطين الأول في $ا$ و $ب$ والثاني في $ا'$ و $ب'$ فيكون $ا$ و $ا'$ قطرين فهما اذن محورا التماثل كل في دائرته أى أن خط المركزين يقسم كلا من الدائرتين الى جزأين متماثلتين

٣ اذا تقاطع محيطا دائرتين في نقطة تقاطعا في نقطة أخرى وكان خط مركبيهما عمودا على الوتر المشترك بينهما مازا بمنتصفه



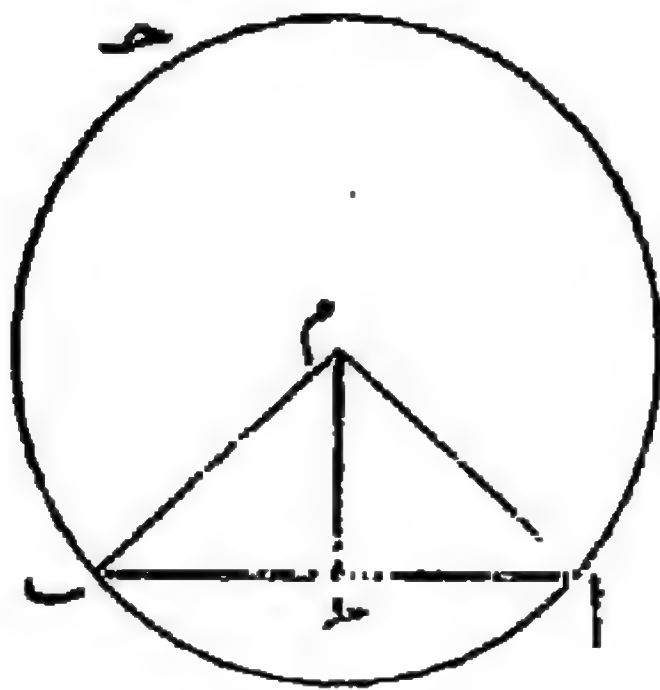
نفرض أن الدائرتين اللتين مركزاهما $م$ و $م'$ تقاطعتا في $د$ نزل من $د$ العمود $د$ على $م$ ثم نمده على استقامته الى $ل$ بحيث يكون البعد $د = ل$ فالنقطتان $د$ و $ل$ اذن متماثلتا الوضع بالنسبة الى خط المركزين $م$ و $م'$ ومن حيث ان احدهما $د$ واقعة على كل من المحيطين فان الأخرى $ل$ تقع على المحيطين ايضا (نتيجة من الخاصة ١)

ومن حيث ان $د = ل$ وهو أيضا عمود على $م$ و $م'$ بالعمل
 \therefore خط المركزين $م$ و $م'$ عمود على الوتر المشترك مازا بمنتصفه

في الأوتار

نظرية ٣١

المستقيم المار بمركز الدائرة والمنصف لأي وتر فيها غير مار بالمركز عمود على هذا الوتر وبالعكس إذا كان هذا المستقيم عمودا على الوتر فإنه ينصفه



إذا فرضنا أن $ا ب ح$ دائرة مركزها $م$ وأن $م د$ ينصف الوتر $ا ب$ غير المار بالمركز $م$ فإنه يطلب اثبات أن $م د$ عمود على $ا ب$ لذلك نصل $ا م$ $ب م$

البرهان — في المثلثين $ا م د$ $ب م د$

فرضا

$$ا د = ب د$$

$$م د$$

$$ا م = ب م$$

$$\therefore ا د = ب د = م د$$

لأنهما نصفان قطرين

(نظرية ٧)

ولكونهما متجاورتين

وهو المطلوب

$م د$ عمود على الوتر $ا ب$

∴

$م د$ عمود على $ا ب$

وبالعكس إذا فرضنا أن

$م د$ ينصف $ا ب$

فإنه يطلب إثبات أن

القائمي الزاوية

$ا م د$ $ب م د$

البرهان — في المثلثين

بالقيام

$$ا د = ب د = م د$$

$$ا م = ب م$$

$$م د$$

$$ا د = ب د$$

(نظرية ١٨)

وهو المطلوب

$م د$ ينصف $ا ب$ في نقطة $د$

أي أن

نتيجة ١ — المستقيم المقام عمودا على وتر في دائرة من منتصفه يمر بمركزها

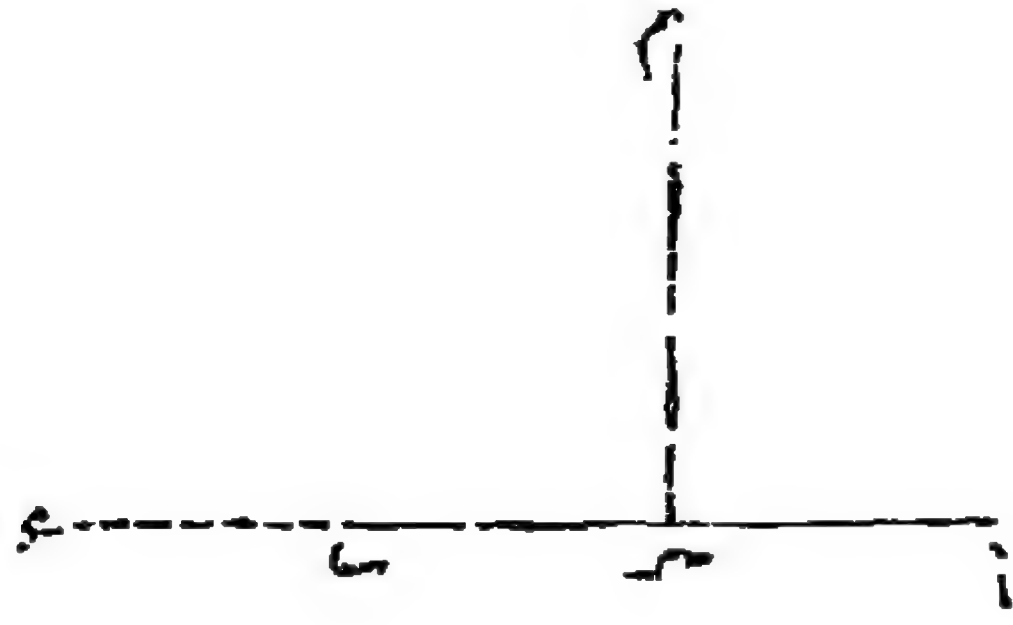
نتيجة ٢ — المستقيم لا يمكن أن يقطع الدائرة في أكثر من نقطتين

لأنه إذا فرض أن مستقيماً قطع دائرة مركزها م في

النقطتين أ و ب

وأنزل من م العمود م ح على أ ب

حدث أن أ ح = ب ح = م ح



فلو قطعت الدائرة المستقيم أ ب في نقطة ثالثة مثل د

لكان أ ح مساوياً د ح وهذا محال

نتيجة ٣ — وتر الدائرة يكون بتمامه فيها

تمارين

(عددية وتخطيطية)

١ في شكل نظرية ٣١ إذا كان الوتر أ ب = ٨ سنتيمترات و م ح = ٣ سنتيمترات فما طول أ م ارسم الشكل وحقق الناتج بالقياس

٢ المطلوب إيجاد طول الوتر الذي على بعد ٥ سنتيمترات من مركز دائرة نصف قطرها ١٣ سنتيمتراً

٣ ارسم وترين في دائرة نصف قطرها سنتيمتران طول أحدهما ٣,٢ من السنتيمترات وطول الآخر ٢,٤ من السنتيمترات ثم أوجد مقدار بعدهما عن مركز الدائرة بالحساب وحققه بالقياس

٤ ارسم وترًا طوله ٦ سنتيمترات في دائرة قطرها ٨ سنتيمترات واحسب بعد الوتر عن مركز الدائرة لأقرب مليمتروحقق الناتج بالقياس

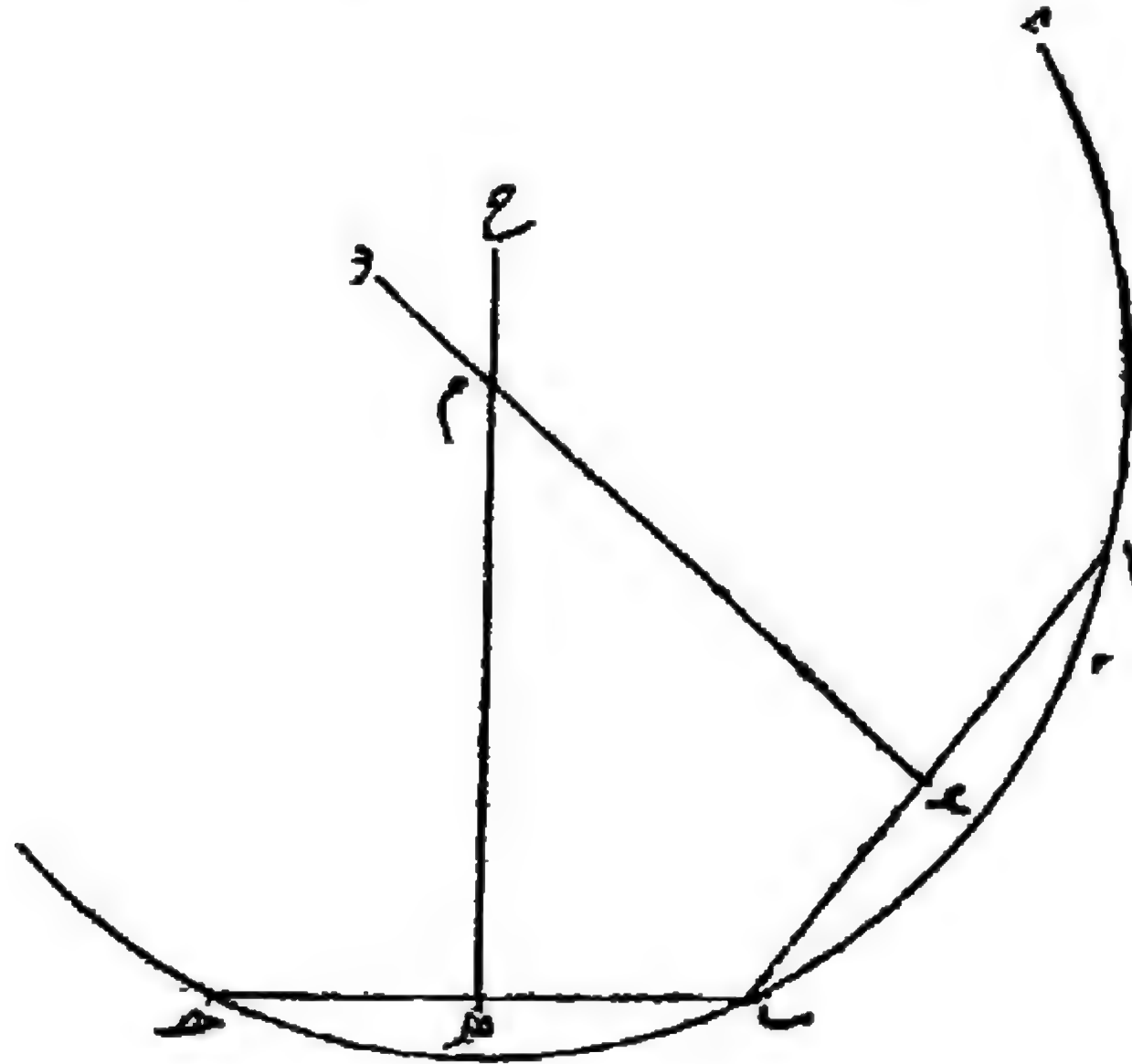
٥ دائرة قطرها ١٨٥ سنتيمتراً مرسوم فيها وتر طوله ١٧٥ سنتيمتراً والمطلوب حساب بعد هذا الوتر عن المركز ووضع رسم لذلك (بقياس سنتيمتر لكل ٥٠ سنتيمتراً) يمكن بواسطة تحقيق الناتج بالقياس

٦ أ ب وتر طوله ٢,٤ من البوصات مرسوم في دائرة مركزها م ونصف قطرها ١,٢ من البوصات ما مساحة المثلث م أ ب

٧ ل و د نقطتان البعد بينهما ٦ سنتيمترات والمطلوب رسم دائرة تمر بهما نصف قطرها ٣,٤ من السنتيمترات واستخراج بعد المركز عن الوتر ل و د بالحساب وتحقيق ذلك بالقياس

نظرية ٣٢

كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة لا يمكن أن يمر بها إلا محيط دائرة واحد



الفرض ١ ٦ ب ٦ ٦ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة
والمطلوب إثبات أنه لا يمكن أن يمر بهذه النقط إلا محيط دائرة واحد
لذلك نصل ١ ب ٦ ب ٦

ثم نقيم على ١ ب ٦ ب ٦ من منتصفيهما العمودين د و ٦ هـ ع
فن حيث ان المستقيمين ١ ب ٦ ب ٦ ليسا على استقامة واحدة فالعمودان د و ٦ هـ ع
لا يمكن أن يتوازيا فيتقاطعان في م

البرهان — من حيث ان د و عمود على ١ ب من منتصفه

∴ كل نقطة من نقطه على بعدين متساويين عن ١ ب (عملية ١٤)

وكذلك كل نقطة من نقط هـ ع على بعدين متساويين عن ٦ ب ٦

∴ نقطة م على أبعاد متساوية عن ١ ب ٦ ب ٦ لأنها نقطة تقاطع العمودين

ومن حيث انه لا يوجد نقطة خلفها على أبعاد متساوية عن ١ ب ٦ ب ٦

∴ الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها م تمر بالنقطتين ١ ب ٦ ب ٦ ويكون محيط هذه

الدائرة هو المحيط الوحيد الذي يمر بالنقط الثلاث المعلومة وهو المطلوب

نتيجة ١ — يكفي لتعيين وضع الدائرة ومساحتها معرفة ثلاث نقط فقط من محيطها لأنه بذلك
يتعين وضع المركز وطول نصف القطر

نتيجة ٢ — لا يمكن أن يشترك محيطا دائرتين في أكثر من نقطتين إلا اذا انطبق كل على الآخر

تمام الانطباق لانهما ان اشتركا في ثلاث نقط لزم أن يتحدا في كل من المركز ونصف القطر

فرض عملي — يؤخذ من نظرية ٣٢ أنه يمكن فرض رسم محيط دائرة يمر برؤوس مثلث معلوم

تعريف — يقال للدائرة المارة برؤوس المثلث انها مرسومة عليه أو مرسومة خارجه

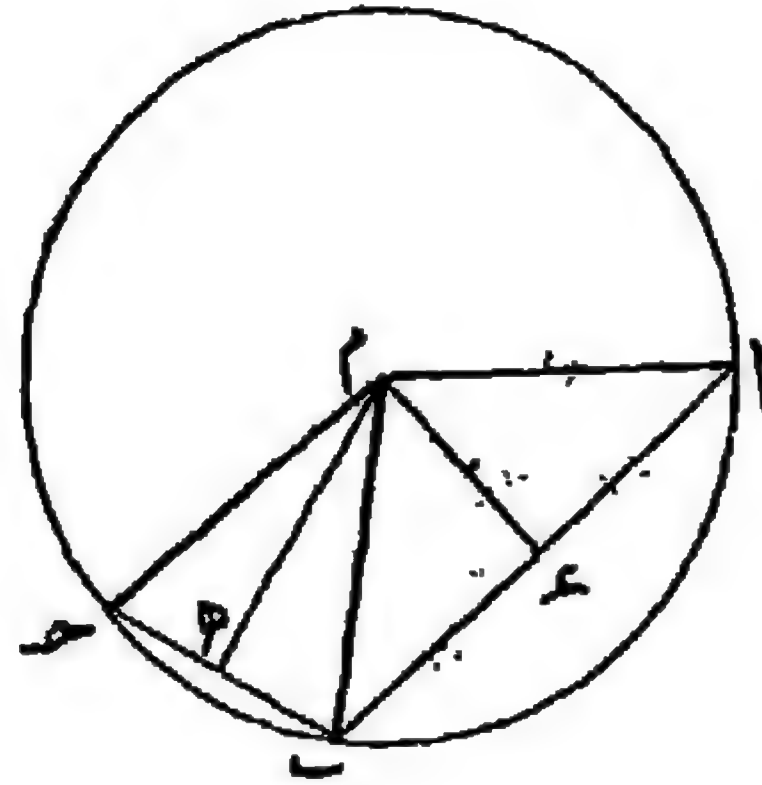
تمارين على نظريتي ٣١ و ٣٢

(مسائل نظرية)

- (١) إذا قطع مستقيم دائرتين متحدتي المركز فإن جزأيه المحصورين بين محيطيهما متساويان
- (٢) دائرتان مركزاهما A و B متقاطعتان في C و D برهن على أن مركزيهما A و B ومنتصف الوتر المشترك CD على استقامة واحدة
وعلى ذلك برهن على أن خط المركزين عمود على الوتر المشترك ما لم يمتصفه
- (٣) A و B و C وتران متساويان في دائرة برهن على أن منتصف AB يمر بالمركز
- (٤) أوجد الحل الهندسي لمراكز جميع الدوائر التي تمر بنقطتين معلومتين
- (٥) ارسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين على شرط أن يكون مركزها على مستقيم معلوم . متى تستحيل هذه المسئلة
- (٦) ارسم دائرة نصف قطرها معلوم تمر بنقطتين معلومتين . متى تستحيل حل هذه المسئلة

نظرية ٣٣

إذا أمكن مد ثلاثة مستقيمت متساوية من نقطة داخل دائرة الى محيطها كانت النقطة المذكورة مركز الدائرة



إذا فرضنا أن AB > الدائرة المعلومة وأن M نقطة داخلها وأن المستقيمت MA MB MC > الممدودة منها الى محيط الدائرة متساوية

فانه يطلب إثبات أن M مركز الدائرة AB >

لذلك نصل AB BC >

وننصف AB في D BC في E >

ونصل MD ME >

البرهان — في المثلثين MDA MEB >

$$DA = BE$$

$$MD = ME \text{ مشترك}$$

$$MA = MB$$

$$\therefore \angle MDA = \angle MEB$$

{ من حيث ان

بالفرض

(نظرية ٧)

ولكونهما متجاورتين فكل منهما قائمة

ولكون المستقيم MD عمودا على AB من منتصفه

(نظرية ٣١ نتيجة ١)

يمر بمركز الدائرة

وكذلك المستقيم ME

ومن حيث ان MD ME لا يتقاطعان إلا في M فهي المركز وهو المطلوب

تمارين على الأوتار

(مسائل عددية وتخطيطية)

- ١ أ ب ك ح مستقيمان متعامدان طول الأول ٤ سنتيمترات والثاني ٧,٥ من السنتيمترات والمطلوب رسم دائرة تمر بالنقط أ ك ب ح وحساب طول نصف قطرها وتحقيقه بالقياس
- ٢ ارسم دائرة يكون فيها الوتر الذي طوله ٦ سنتيمترات على بعد ٣ سنتيمترات من المركز واحسب طول نصف القطر لأقرب مليمتروحققه بالقياس
- ٣ ارسم دائرة قطرها ٨ سنتيمترات وارسم فيها وترًا مساويًا لنصف القطر ثم احسب بعد هذا الوتر عن المركز لأقرب مليمتروحققه بالقياس
- ٤ دائرتان نصف قطر أحدهما ٢٦ سنتيمترا ونصف قطر الأخرى ٢٥ سنتيمترا تقاطعتا في نقطتين البعد بينهما ٤٨ سنتيمترا والمطلوب حساب مقدار البعد بين المركزين ووضع رسم لذلك (بمقياس سنتيمتر لكل ١٠ سنتيمترات) وتحقيق الناتج بالقياس
- ٥ وتران متوازيان في دائرة قطرها ١٣ سنتيمترا طول أحدهما ٥ سنتيمترات والآخر ١٢ سنتيمترا بين أن البعد بينهما إما أن يكون ٨,٥ من السنتيمترات أو ٣,٥ من السنتيمترات
- ٦ وتران متوازيان في دائرة في جهة واحدة من مركزها طول أحدهما ٦ سنتيمترات والآخر ٨ والبعد بينهما سنتيمتر واحد والمطلوب حساب مقدار نصف القطر وقياسه
- ٧ بين على ورق المربعات أنه إذا ركز في أي نقطة على محور السينات ورسم محيط دائرة يمر بالنقطة (٦ ٥) فإنه لابد أن يمر بالنقطة (٦ - ٥) (راجع صفحة ١٤٣)

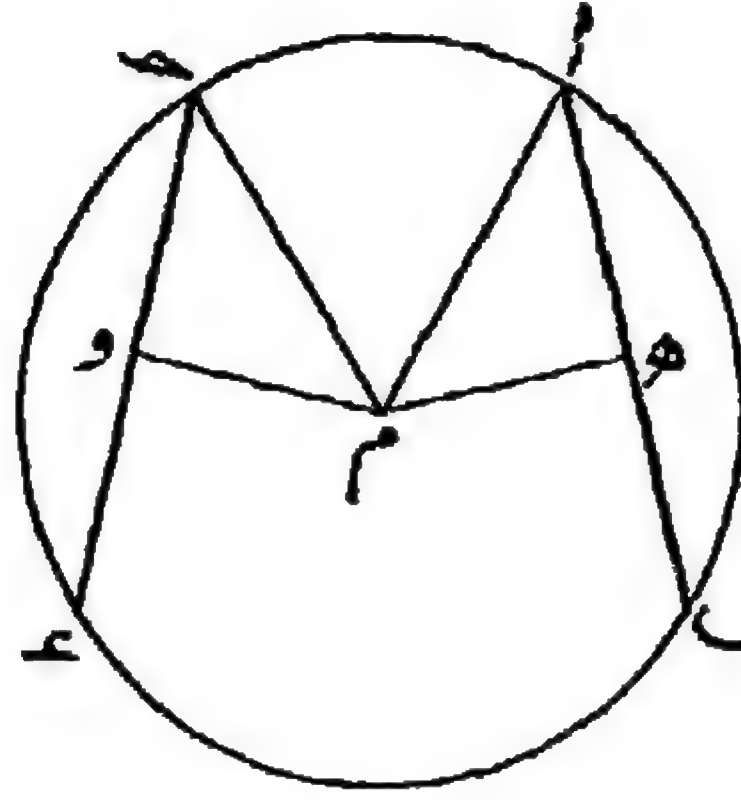
(مسائل نظرية)

- ٨ المستقيم الواصل بين منتصفى وترين متوازيين في دائرة يمر بمركزها
- ٩ أوجد المحل الهندسى لمتصفات الأوتار المتوازية في الدائرة
- ١٠ الوتران المتقاطعان في الدائرة لا ينصف أحدهما الآخر إلا إذا كان كل منهما قطرا
- ١١ نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع المرسوم داخل^(١) دائرة تكون مركز هذه الدائرة
- ١٢ متوازي الأضلاع الذى يمكن رسمه داخل دائرة لا يكون إلا مستطيلا أو مربعا

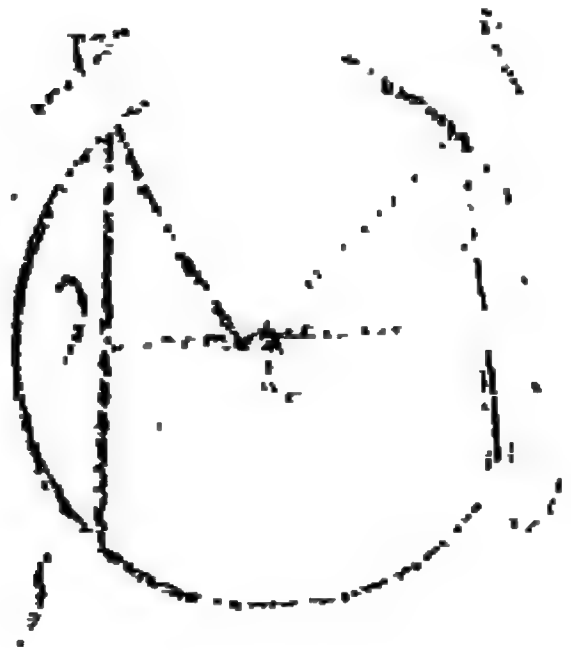
(١) الشكل المرسوم داخل دائرة مامر محيطها برؤوسه

نظرية ٣٤

الاقطار المتساوية في الدائرة على أبعاد متساوية عن مركزها وبالعكس الاوتار التي على أبعاد متساوية عن المركز متساوية



إذا فرضنا أن AB و CD وتران في الدائرة التي مركزها M
 وأن MH و MG عمودان عليهما من M
 (فأولاً) إذا كان $AB = CD$
 فإنه يطلب إثبات أن البعد $MH = MG$ البعد M و
 لذلك نصل MA و MC و MB و MD
 البرهان — من حيث أن MH عمود على AB
 $\therefore MH$ ينصف AB (نظرية ٣١)
 أي أن $AH = HB$
 وكذلك $CG = GD$
 لكن $AB = CD$
 $\therefore AH = CG$
 ثم أنه في المثلثين MHA و MGC
 $MH = MG$ و $MA = MC$ و $HA = GC$
 من حيث أن الضلع MA و الضلع MC و الضلع HA و الضلع GC
 \therefore يتطابق المثلثان (نظرية ١٨)
 ومنه ينتج أن $MH = MG$ وهو المطلوب
 (وثانياً) بالعكس إذا كان $MH = MG$
 فإنه يطلب إثبات أن $AB = CD$



البرهان — ثبت مما تقدم أن $ا ه نصف ا ب$ $ك و نصف ح د$

ففي المثلثين $م ه ا$ $ك و ح$

بالقياس

من حيث ان $\left. \begin{array}{l} د م ه ا = د م و ح \\ ك م ا = ك م ح \\ ك م ه = ك م و \end{array} \right\}$

(نظرية ١٨)

$ا ه = ك و$

\therefore مثلا كل منهما متساويان

وهو المطلوب

أي أن $ا ب = ك د$

(مسائل نظرية)

١ المطلوب إيجاد المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار المتساوية في الدائرة

٢ إذا تقاطع وتران في دائرة وكان المستقيم الواصل من نقطة تقاطعهما إلى المركز منصفًا للزاوية المحصورة بينهما كان هذان الوتران متساويين

٣ إذا تقاطع وتران متساويان في دائرة فإن جزأى أحدهما يساويان جزأى الآخر كل لنظيره

٤ المطلوب رسم وتر في دائرة معلومة يساوي طولًا معلوما (على شرط ألا يكون أكبر من القطر) ويوازي مستقيما معلوما

٥ ل وتر معلوم في دائرة $ا ب$ قطر فيها والمطلوب إثبات أن مجموع العمودين النازلين من $ا ب$ على $ك د$ أو الفرق بينهما ثابت مهما تغير وضع القطر

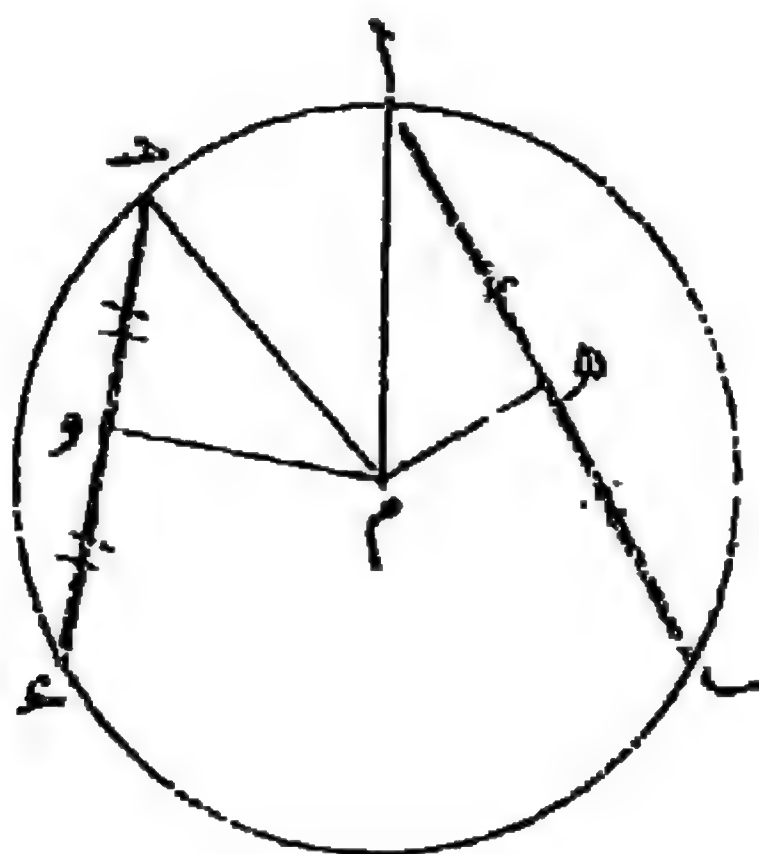
(مسائل تخطيطية)

٦ دائرة نصف قطرها يساوي $٤ر٨$ من السنتيمترات رسم فيها عدة أوتار متساوية طول كل منها $٨ر٨$ من السنتيمترات أثبت أن منتصفات هذه الأوتار على محيط دائرة واحد واحسب طول نصف قطرها ثم قسه بعد أن ترسمها

٧ البعد بين مركزي دائرتين هو ٨ سنتيمترات وطول الوتر المشترك بينهما $٨ر٨$ من السنتيمترات ونصف قطر الدائرة الكبرى $٧ر٤$ من السنتيمترات اذكر حلا لإيجاد نقطتي تقاطع الدائرتين واوجد طول نصف قطر الدائرة الصغرى

نظرية ٣٥

إذا اختلف بعدا وترين عن مركز الدائرة فأقرب الوترين أكبرهما وبالعكس أكبر الوترين أقربهما من المركز



نفرض أن
وان
(١) إذا كان
أ ب أكبر من م و يكون
أ ب أكبر من م و
(٢) إذا كان
أ ب أكبر من م و يكون م هـ أصغر من م و
لذلك نصل
البرهان — من حيث أن
م هـ عمود على الوتر أ ب
م هـ ينصف أ ب
أ هـ = هـ ب
ح و = و د
م أ = م ح
المربع المنشأ على م أ = المربع المنشأ على م ح
ولكون

المربع المنشأ على الوتر م أ = مجموع المربعين المنشأين على م هـ و هـ أ
وكذلك
المربع المنشأ على م ح = مجموع المربعين المنشأين على م و و ح
مجموع المربعين المنشأين على م هـ و هـ أ = مجموع المربعين المنشأين على م و و ح

فينتج

(١) اذا كان م هـ أصغر من م و فالمربع المنشأ على م هـ أصغر من المربع المنشأ على م و

∴ المربع المنشأ على هـ ا لابد أن يكون أكبر من المربع المنشأ على و ح

∴ هـ ا أكبر من و ح

∴ ا ب أكبر من ح د

(٢) وبالعكس اذا كان ا ب أكبر من ح د

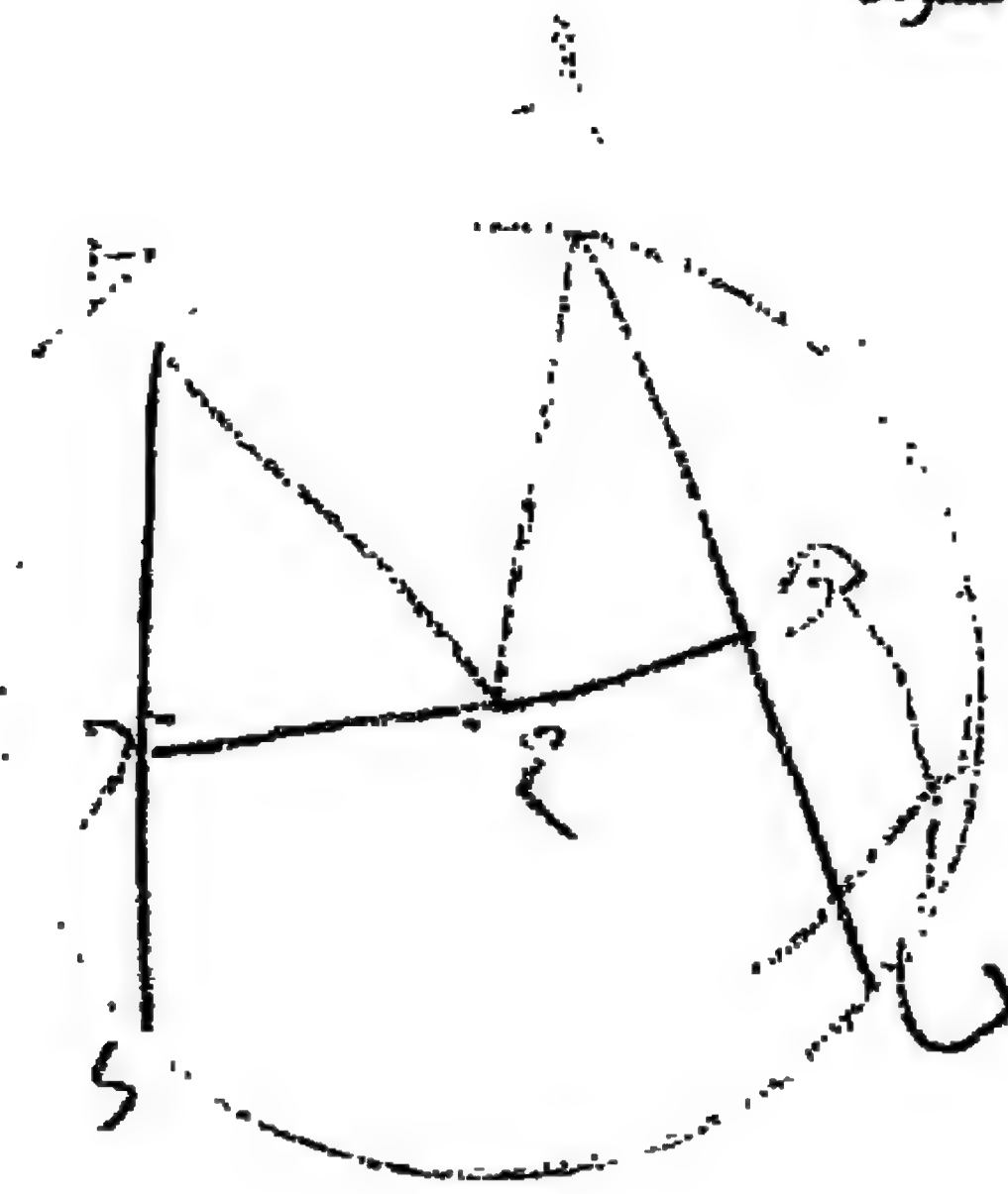
هـ ا أكبر من و ح

فالمربع المنشأ على هـ ا أكبر من المربع المنشأ على و ح

∴ لابد أن يكون المربع المنشأ على م هـ أصغر من المربع المنشأ على م و

∴ م هـ أصغر من م و وهو المطلوب

نتيجة — أكبر أوتار الدائرة قطرها



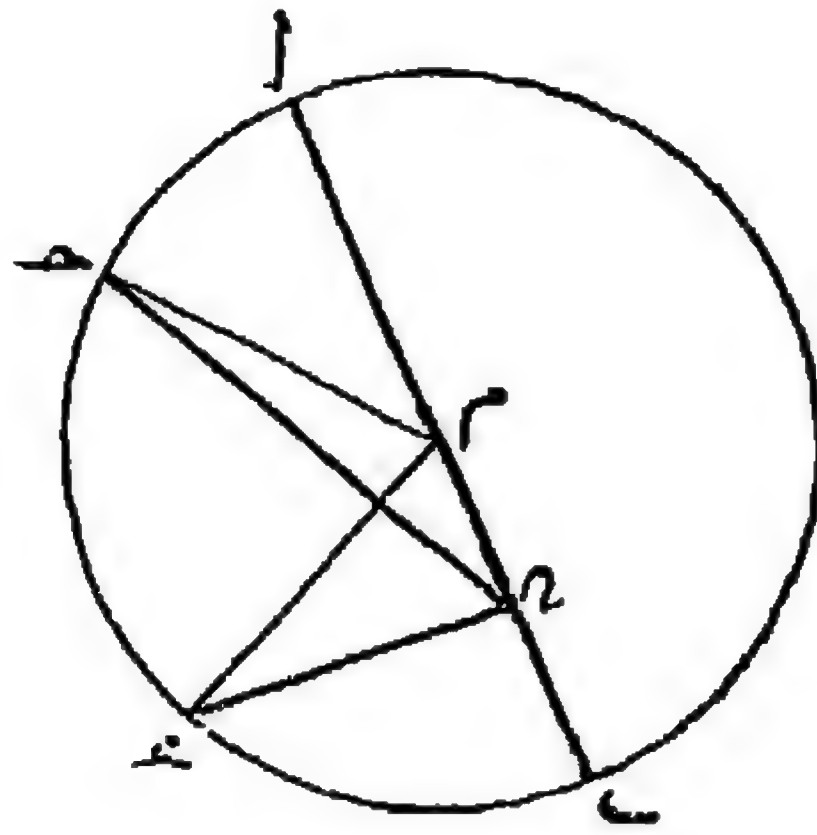
تمارين

(مسائل متنوعة)

- ١- ارسم أقصر الأوتار التي يمكن رسمها في الدائرة من نقطة مفروضة داخلها
- ٢ ارسم المثلث ABC إذا علم أن ضلعه $AB = 7$ سنتيمترات و $AC = 2,4$ من السنتيمترات و $BC = 7,4$ من السنتيمترات ثم ارسم دائرة تمر بنهايتي الضلع AB ويكون مركزها على الضلع BC واحسب طول نصف القطر ثم قس
- ٣ مثلث طول أضلاعه $6,5$ من السنتيمترات و 6 و 7 سنتيمترات و $7,5$ من السنتيمترات ارسم دائرة تمر برؤوسه و قس نصف قطرها
- ٤ AB وتر ثابت في دائرة معلومة و C س ص وتر متحرك بحيث يكون منتصفه E دائماً على AB . متى يكون س ص أطول ما يمكن ومتى يكون أصغر ما يمكن بين أن طول س ص يتزايد كلما اقتربت E من منتصف الوتر AB
- ٥ بين على ورق المربعات أن الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 6 سنتيمترات وبالنقطتين $(4,8 \text{ و } 3,6)$ من السنتيمترات و $(3,6 \text{ و } 4,8)$ من السنتيمترات
ثم اوجد (١) طول الوتر الواصل بين هاتين النقطتين و (٢) البعدين الاحداثيين لمنتصف هذا الوتر
(٣) بعد هذا الوتر عن نقطة الأصل

نظرية ٣٦

إذا رسم من نقطة داخل دائرة غير مركزها عدة مستقيمت الى محيطها فأكبرها ما كان ما إذا بالمرکز وأصغرها هو امتداد الأكبر ليكون قطراً وأكبر المستقيمت الأخرى ما كان مقابلاً لأكبر زاوية مركزية (والزاوية المركزية ما كان رأسها في مركز الدائرة)



فإذا فرض أن

ا ب د دائرة و ه نقطة ما غير المركز داخلها

ورسم من ه المستقيم ه ا ما إذا بالمركز والمستقيم ه ب على استقامة ا ه والمستقيمان ه د ه ج

وكانت الزاوية المركزية ه م د التي يقابلها ه ج أكبر من ه م د التي يقابلها ه د

فانه يطلب إثبات أن

(١) ه ا أكبر المستقيمت

(٢) ه ب أصغرهما

(٣) ه ج أكبر من ه د

لذلك نصل م ه م ج م د

البرهان (١) في ه م د مجموع الضلعين ه م م ج م د أكبر من ه د (نظرية ١١)

لكن م ه = م ج لأنهما نصفاً قطرين

∴ م ه + م ج أكبر من ه د

أي أن ه ا أكبر من ه د

∴ د ه أكبر من د و (نظرية ١٩) وهو المطلوب

تمارين

(مسائل متنوعة)

١ برهن على أن جميع الدوائر التي تمر بنقطة معلومة ومراكزها على مستقيم معلوم غير مآثر بالنقطة المعلومة يجب أن تمر جميعها بنقطة أخرى ثابتة

٢ إذا قطع مستقيم دائرتين متقاطعتين وكان موازيا لوترهما المشترك فإن جزأى التقاطع المحصورين بين محيطي الدائرتين متساويان

٣ إذا تقاطعت دائرتان فأى مستقيمين متوازيين يمران بنقطتي تقاطعهما وينتهيان بالمحيطين يكونان متساويين

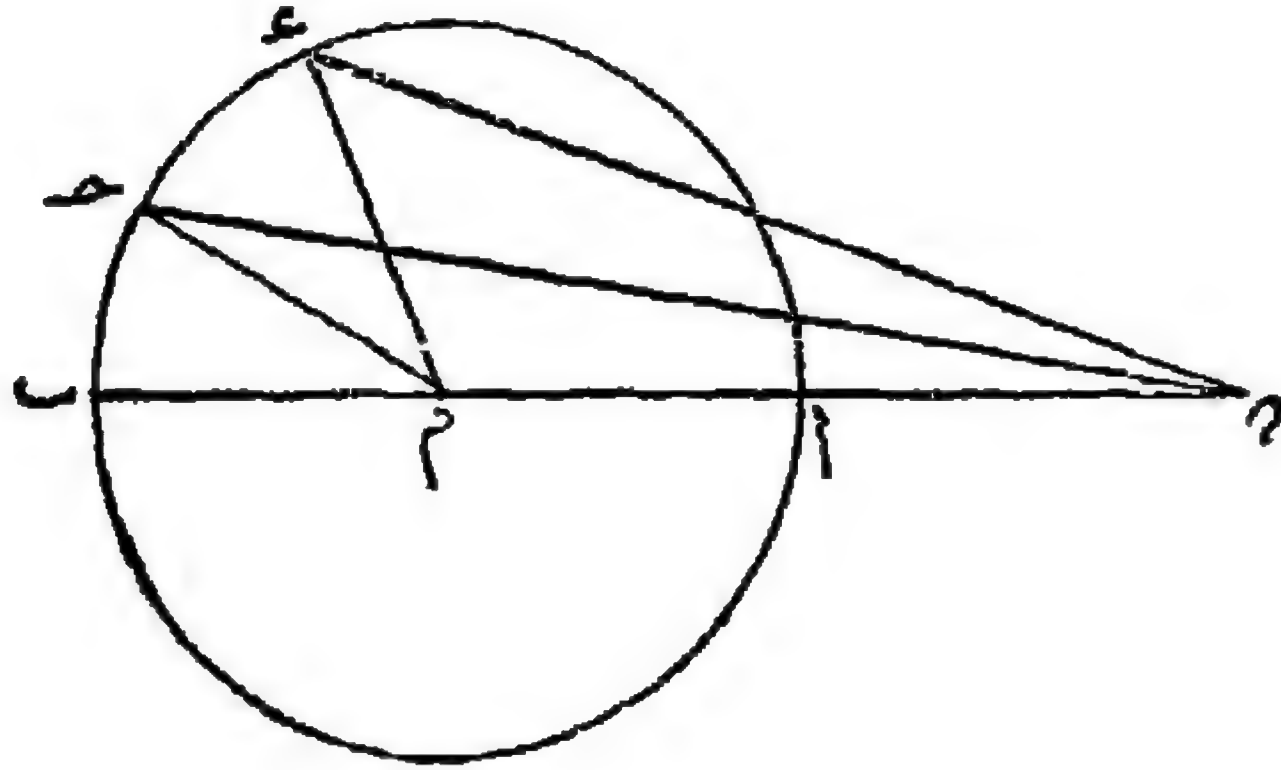
٤ إذا تقاطع محيطا دائرتين فالمستقيمان المآثران بأحدى نقطتي التقاطع والمنتهيان بالمحيطين متساويان ان صنعا مع الوتر المشترك زاويتين متساويتين

٥ دائرتان متقاطعتان طول وترهما المشترك ٢٤ سنتيمترا وقطر أحدهما ٧٤ سنتيمترا وقطر الأخرى ٤٠ سنتيمترا ما طول البعد بين مركزيهما ارسم الشكل (بمقياس سنتيمتر لكل ١٠ سنتيمترات)
حقق الناتج بالمقياس

٦ ارسم دائرتين نصف قطر أحدهما سنتيمتران ونصف قطر الأخرى ٣,٤ من السنتيمترات والبعد بين المركزين ٤,٢ من السنتيمترات واحسب طول الوتر المشترك ومقدار بعده عن كل من المركزين وحقق ذلك بالمقياس

نظرية ٣٧

إذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها عدة مستقيمت إلى المحيط فأكبرها مامر بالمركز وأصغرها ما إذا امتد على امتدائه مر بالمركز وأكبر المستقيمت الأخرى ما كان مقابلا لأكبر زاوية مركزية



إذا فرضنا أن $ا ب ح$ د الدائرة المعلومة

وان $د$ النقطة المفروضة خارجها ورسمنا المستقيمت $د ا ب ح د$ $د ا ب ح د$ إلى محيطها وكانت الأول منها مازا بالمركز $م$ والزاوية المركزية $د م ح$ التي يقابلها $د ح$ أكبر من الزاوية المركزية $د م د$ التي يقابلها $د د$

فانه يطلب إثبات أن

(١) $د ب$ أكبر المستقيمت

(٢) $ا$ أصغرها

(٣) $د ح$ أكبر من $د د$

لذلك نصل $م ح د$ $م د$

البرهان (١) في $د م ح$ مجموع الضلعين $د م$ $م ح$ أكبر من الضلع $د ح$

لكن $م د = م ب$ لأنهما نصف قطر

$د م + م ب$ أكبر من $د ح$

أي أن $د ب$ أكبر من $د ح$

وكذلك يمكن إثبات أن $د ب$ أكبر من أي مستقيم آخر يرسم من $د$ إلى محيط الدائرة

أي أن $د ب$ أكبر المستقيمت

(٢) في $د م' د$ مجموع الضلعين $د م$ $م د$ أكبر من $د م$

لكن $م د = م ا$ لأنهما نصف قطر

فالجزء الباقي $د$ أكبر من الجزء الباقي $ا$

تمارين

(مسائل متنوعة)

١ المعلوم دائرتان غير متقاطعتين والمطلوب إيجاد أطول وأقصر المستقيمتين التي أحد طرفيها على أحد المحيطين والطرف الآخر على المحيط الثاني

٢ إذا فرضت نقطة على محيط دائرة ورسم منها مستقيمتين منتهية بالمحيط فان أكبرها ما مر بالمركز وأكبر أي اثنين آخرين ما قابل زاوية مركزية أكبر مما قابلها الآخر

٣ أكبر المستقيمتين المارة باحدى نقطتي تقاطع دائرتين والمنتهية بالمحيطين ما كان موازيا لخط المركزين

٤ ارسم دائرتين على ورق المربعات مركزاهما على محور السينات على شرط أن يتقاطعا في نقطة (٨ ٦ - ١١) وأوجد البعدين الاحداثيين لنقطة تقاطعهما الأخرى

٥ ارسم على ورق المربعات دائرتين مركز إحداهما النقطة (١٥ ٦ ٠) ومركز الأخرى النقطة (٦ ٦ - ٠) على شرط أن تتقاطعا في نقطة (٨ ٦ ٠) وأوجد طول كل من نصفي القطرين والبعدين الاحداثيين لنقطة التقاطع الأخرى

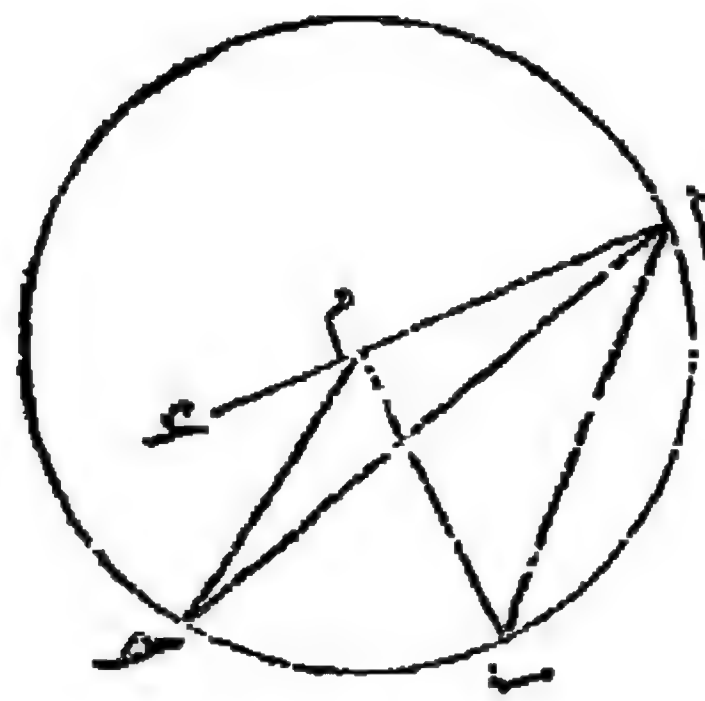
٦ ارسم مثلثا متساوي الساقين م ا ب زاوية رأسه م = ٨٠° ثم ارسم دائرة مركزها م ونصف قطرها م ا وافرض على المحيط النقط ح ٦ د ٦ هـ على شرط أن تكون كلها في جهة ا ب التي فيها المركز ثم قس كلا من الزوايا ح ٦ د ٦ هـ التي يقابلها الوتر ا ب فاذا غيرت مقدار د م وقست الزوايا ح ٦ د ٦ هـ كما تقدم فما هي النتيجة التي تصل اليها

في الزوايا المرسومة في قطعة من الدائرة والزوايا المركزية والمحيطية

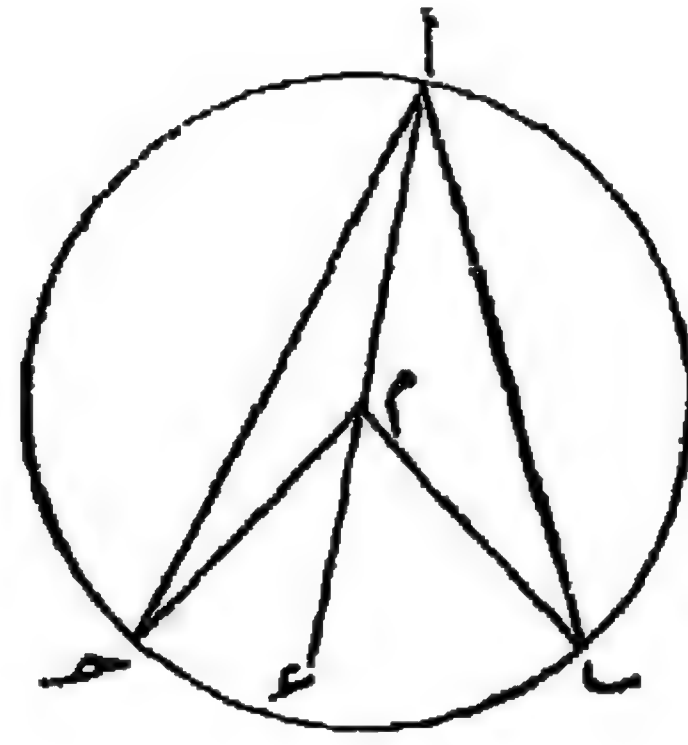
تبيسه — الزوايا المركزية ما كان رأسها في مركز الدائرة وضلعها نصفين قطرين والمحيطية ما كان رأسها على المحيط وضلعها وترين

نظرية ٣٨

الزاوية المركزية ضعف الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس المحصور بين ضلعيها



(شكل ٢)



(شكل ١)

إذا فرضنا أن $\angle AOB$ دائرة مركزها M وأن $\angle ACB$ زاوية مركزية $\angle AOB$ زاوية محيطية
مشتركة معها في القوس AB المحصور بين ضلعيها

فانه يطلب إثبات ان $\angle AOB = 2 \angle ACB$

لذلك نصل AM ونمده الى D

البرهان — في $\triangle AMB$

من حيث ان $\angle AMB = \angle A + \angle B$

$\angle AMB = \angle A + \angle B$ \therefore

$\angle AMB = \angle A + \angle B$ \therefore

لكن $\angle AMB = \angle A + \angle B$ الخارجية = $\angle A + \angle B$

$\angle AMB = \angle A + \angle B$ \therefore

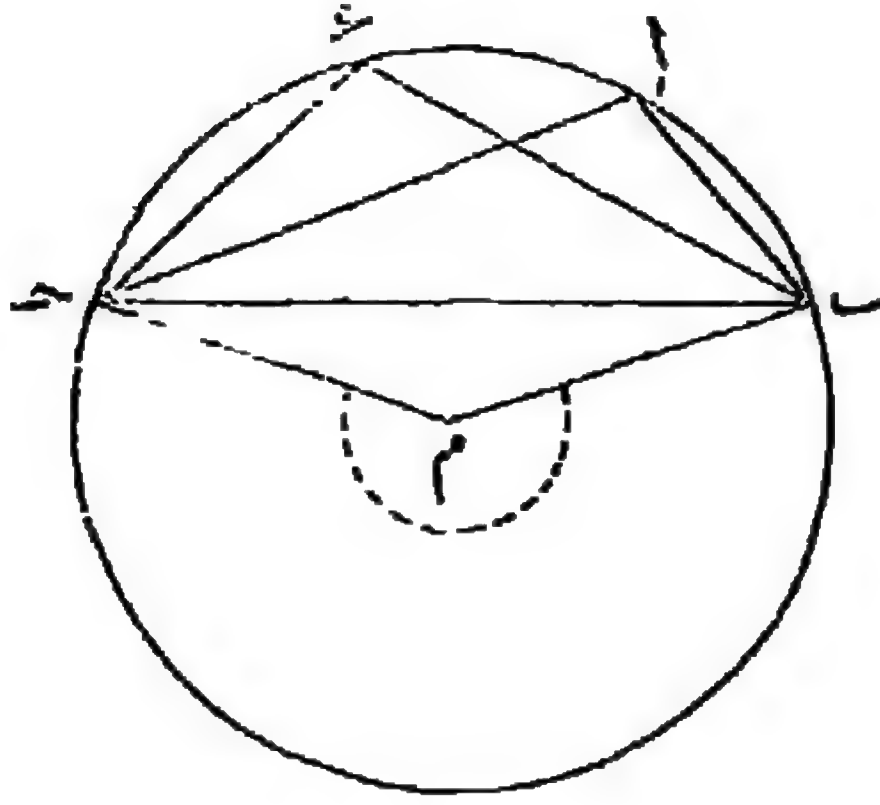
وكذلك يمكن إثبات أن $\angle AMB = 2 \angle ACB$

وبجمع هذين الناتجين في (الشكل ١) وإيجاد الفرق بينهما في (الشكل ٢)

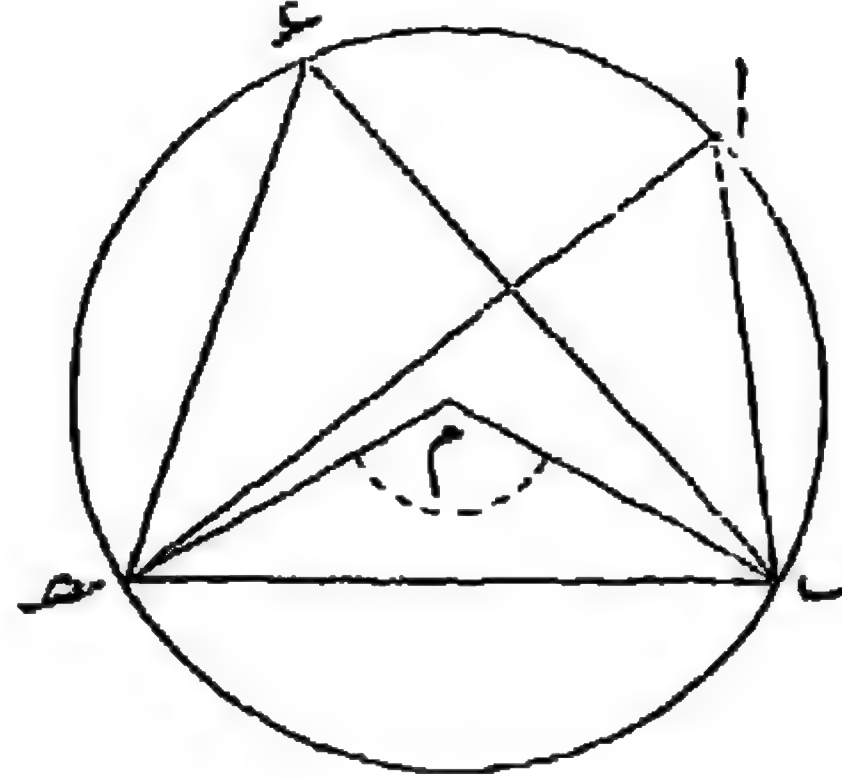
ينتج أن $\angle AOB = 2 \angle ACB$ وهو المطلوب

نظرية ٣٩

الزوايا المرسومة في قطعة واحدة من الدائرة متساوية



(شكل ٢)



(شكل ١)

إذا فرضنا أن الزاويتين $\angle ADB$ و $\angle ACB$ مرسومتان في قطعة واحدة AB من الدائرة التي مركزها M

فانه يطلب إثبات أن $\angle ADB = \angle ACB$

لذلك نصل MB و MA

البرهان — $\angle ADB$ مركزية و $\angle ACB$ محيطية مشتركة معها في القوس AB

$\therefore \angle ADB = \angle ACB$ (نظرية ٣٨)

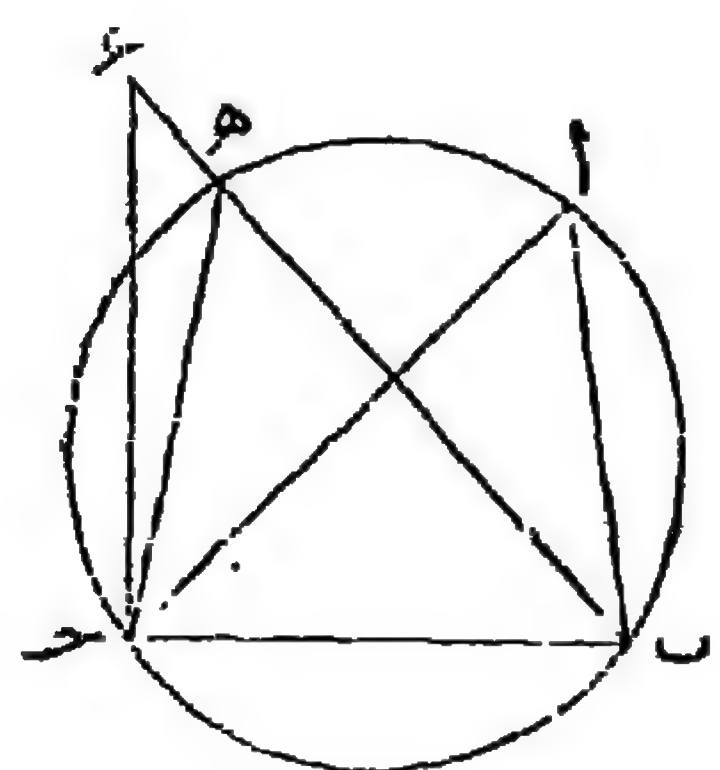
وكذا $\angle ADB = \angle ACB$

$\therefore \angle ADB = \angle ACB$

تنبيه — ربما كانت القطعة المرسومة فيها الزاوية أكبر من نصف الدائرة (شكل ١) أو أصغر منه (شكل ٢) ففي الحالة الثانية تكون الزاوية المركزية $\angle ADB$ منعكسة لكنها لا تزال تساوي ضعف كل من الزاويتين المحيطيتين المرسومتين في القطعة وذلك بتطبيق نفس البرهان المتقدم في نظرية ٣٨

عكس نظرية ٣٩

الزوايا المتساوية المرسومة على قاعدة واحدة في جهة واحدة منها تكون رؤوسها على قوس دائرة هذه القاعدة وتر فيها



إذا فرضنا أن $\angle A = \angle B$ $\angle C$ زاويتان متساويتان ومرسومتان على قاعدة واحدة AB وفي جهة واحدة منها فإنه يطلب إثبات أن C تقعان على قوس دائرة يكون AB وتر فيها

لذلك نرسم محيط دائرة يمر بالنقط A B C فإن مر بالنقطة D ثبت المطلوب وإلا فإنه يقطع المستقيم AB إن كانت D خارج الدائرة أو امتداده إن كانت D داخلها

فإذا كانت H نقطة تقاطع المحيط بالمستقيم AB أو بامتداده نصل H C البرهان $\angle B = \angle C = \angle A$ لأنهما مرسومتان في قطعة واحدة لكن $\angle A = \angle C = \angle B$ فرضاً $\therefore \angle B = \angle C = \angle A$

وهذا لا يتأتى إلا إذا وقعت النقطة H على النقطة D

\therefore المحيط المار بالنقط A B C يجب أن يمر بالنقطة D

نتيجة — المحل الهندسي لرؤوس المثلثات المرسومة على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها وزوايا رؤوسها متساوية هو قوس دائرة

تمارين على نظرية ٣٩

١ في (شكل ١) إذا كانت $\angle A = 74^\circ$ فما مقدار كل من الزوايا $\angle B$ $\angle C$ $\angle M$ $\angle G$

٢ في (شكل ٢) إذا فرض أن S نقطة تقاطع AB CD وكانت $\angle A = \angle C$ وكانت $\angle S = 40^\circ$ والزوايا $\angle B = \angle D = 25^\circ$ فما مقدار $\angle B$ وما مقدار $\angle D$ $\angle M$ $\angle N$ المنعكسة

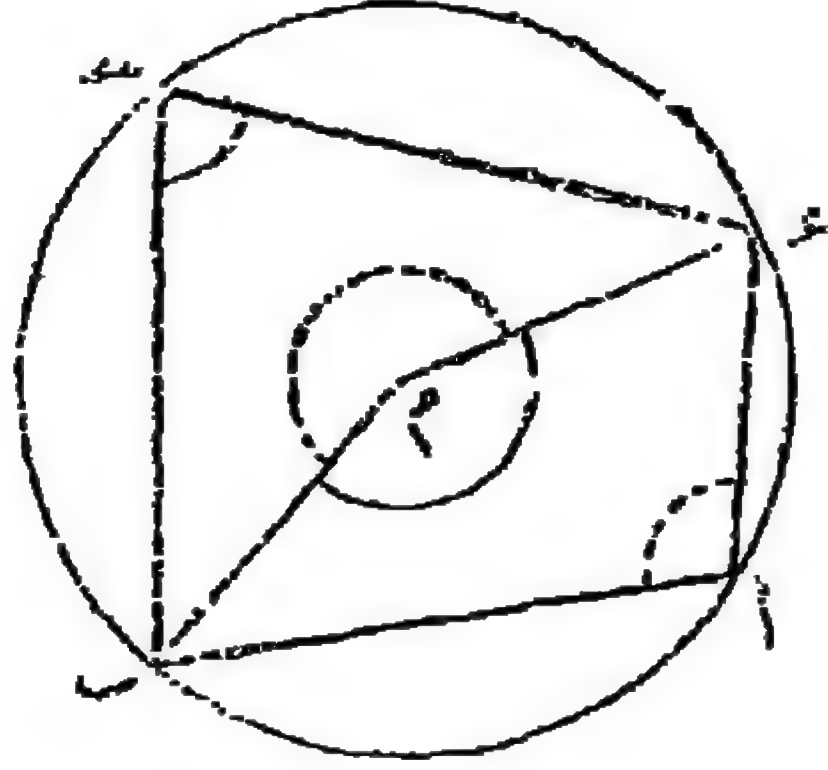
٣ في (شكل ١) إذا كانت $\angle A = 43^\circ$ $\angle B = 1^\circ$ $\angle C = 82^\circ$ فما مقدار كل من الزوايا $\angle B$ $\angle C$ $\angle M$ $\angle G$ $\angle A$ $\angle M$ $\angle G$ $\angle A$

٤ في (شكل ٢) برهن على أن $\angle M$ $\angle B$ أقل دائماً من $\angle D$ $\angle C$ بقدر $\angle D$ قائمة

[في صفحة ١٨٨ تمارين أخرى على نظرية ٣٩]

نظرية ٤٠

الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي المرسوم داخل (١) دائرة متكاملتان



إذا فرضنا أن $\angle \alpha$ و $\angle \gamma$ شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة α و γ
فانه يطلب إثبات أن

$$(١) \quad \angle \alpha + \angle \gamma = \angle \beta + \angle \delta$$

$$(٢) \quad \angle \alpha + \angle \gamma = \angle \beta + \angle \delta$$

لذلك نفرض أن M مركز الدائرة

ونصل M ب α و M ب γ

البرهان - $\angle \alpha$ و $\angle \gamma$ المحيطية $\frac{1}{2}$ $\angle \alpha$ و $\angle \gamma$ المركزية المشتركة معها في القوس α و γ

وكذلك $\angle \beta$ و $\angle \delta$ المحيطية $\frac{1}{2}$ $\angle \beta$ و $\angle \delta$ المركزية المنعكسة المشتركة معها في القوس β و δ

\therefore مجموع الزاويتين α و γ $=$ نصف مجموع الزاويتين β و δ المنعكسة

لكن مجموع هاتين الزاويتين الأخيرتين $= \angle \alpha + \angle \gamma$

$$\therefore \angle \alpha + \angle \gamma = \angle \beta + \angle \delta$$

وكذلك $\angle \alpha + \angle \gamma = \angle \beta + \angle \delta$ وهو المطلوب

تنبيه - بمقارنة نظريتي ٣٩ و ٤٠ إحداها بالأخرى نجد في نظرية ٣٩ أن الزوايا المرسومة

في قطعة واحدة من الدائرة متساوية وفي نظرية ٤٠ أن الزاويتين المرسوميتين في قطعتين متراقتين في دائرة متكاملتان

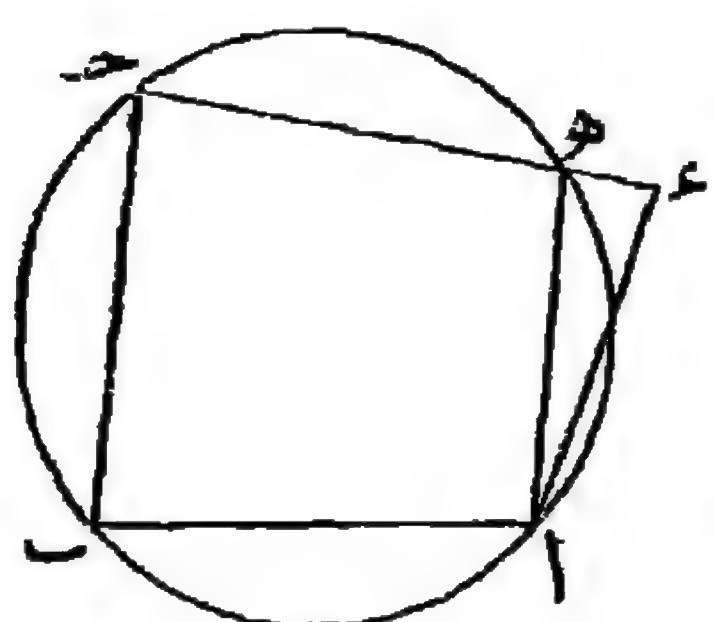
(١) تقدم أن الشكل المرسوم داخل دائرة مامر محيطها برؤوسه

عكس نظرية ٤٠

إذا كانت الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي متكاملتين أمكن أن يمر برؤوسه محيط دائرة واحد

إذا فرضنا أن $\angle A + \angle C = 180^\circ$ شكل رباعي فيه الزاويتان $\angle B$ و $\angle D$ متكاملتان

فانه يطلب إثبات أنه يمكن أن يرسم محيط دائرة واحد يمر بالنقط الأربع A, B, C, D



لذلك نرسم محيط دائرة يمر بالنقط الثلاث A, B, C

فان مر بالنقطة الرابعة D ثبت المطلوب والاقطع AD أو امتداده في H

نصل HD

البرهان — من حيث أن $\angle A + \angle C = 180^\circ$ شكل رباعي داخل دائرة

$\therefore \angle AHD = \angle C$ تكمل $\angle A + \angle C = 180^\circ$

لكن $\angle A + \angle C = 180^\circ$ تكمل $\angle A + \angle C = 180^\circ$ فرضا

$\therefore \angle AHD = \angle C$

وهذا لا يتأتى إلا إذا وقعت H على D

\therefore فالدائرة التي يمر محيطها بالنقط A, B, C يجب أن يمر بالنقطة D أيضا

أي أن $\angle A + \angle C = 180^\circ$ يمكن أن يمر بها محيط دائرة واحد وهو المطلوب

تمارين على نظرية ٤٠

١ ارسم في دائرة نصف قطرها r ستمترات الشكل الرباعي $ABCD$ الذي فيه زاوية $\angle A = 126^\circ$ وقس كلا من الزوايا الباقية ومن ذلك بين أن الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي المرسوم داخل الدائرة متكاملتان

٢ برهن على نظرية ٤٠ بواسطة نظريتي ٣٩ و ١٦ وذلك بعد أن تصل كل رأسين متقابلين في الشكل بمستقيم

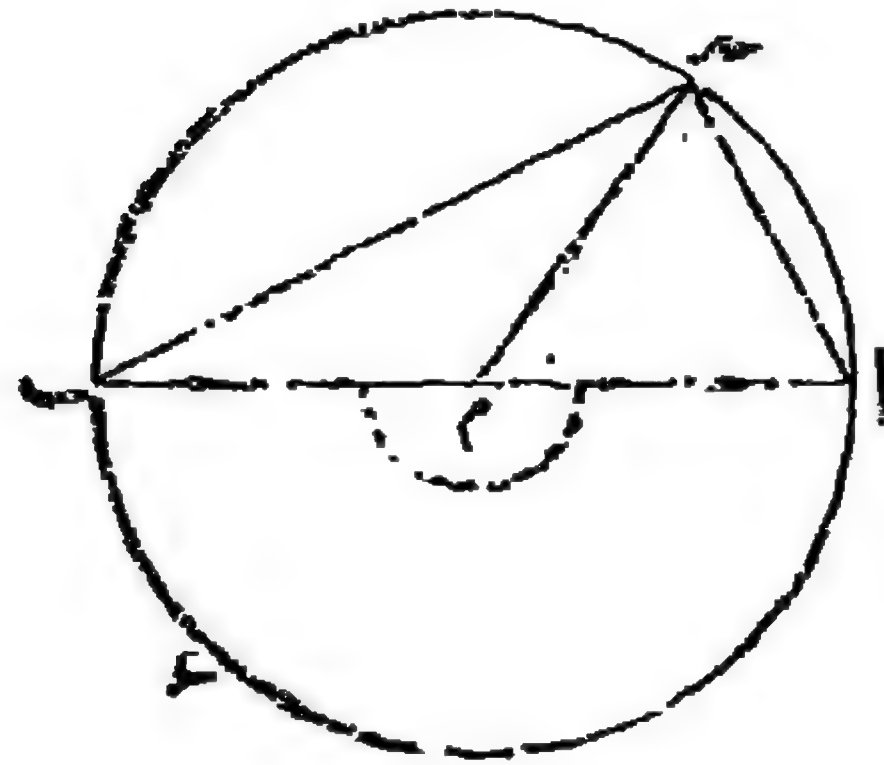
٣ إذا أمكن رسم محيط دائرة يمر برؤوس شكل متوازي الأضلاع فان هذا الشكل إما أن يكون مستطيلا أو مربعا

٤ $\angle A + \angle C = 180^\circ$ مثلث متساوي الساقين رسمنا المستقيم SS موازيا لقاعدته BC وقاطعا لساقيه في S و S' بين على أن النقط الأربع B, C, S, S' على محيط دائرة واحد

٥ إذا مد أحد أضلاع الشكل الرباعي المرسوم داخل الدائرة على استقامته كانت الزاوية الخارجة مساوية للزاوية الداخلة المقابلة للزاوية التي مد أحد ضلعها

نظرية ٤١

الزاوية المرسومة في نصف الدائرة قائمة



إذا فرضنا أن A, B, C دائرة قطرها AB ومركزها M وكانت C نقطة على نصف المحيط ACB فإنه يطلب إثبات أن $\angle ACB$ قائمة

للبرهنة على ذلك طريقتان

الأولى — من حيث أن $\angle ACB$ محيطية وزاوية AMB المستقيمة مركزية وكلاهما مشترك في القوس ACB المحصورين ضلعيهما

$$\angle ACB = \text{نصف الزاوية المستقيمة } AMB$$

$$\angle ACB = 90^\circ \quad \text{لكن الزاوية المستقيمة}$$

$$\angle ACB = 90^\circ \quad \text{وهو المطلوب}$$

الثانية — نصل

$$\angle ACB = \angle AMB$$

$$\angle ACB = \angle AMB \quad \text{(نظرية ه)}$$

$$\angle ACB = \angle AMB$$

$$\angle ACB = \angle AMB$$

$$\angle ACB = \angle AMB + \angle AMB$$

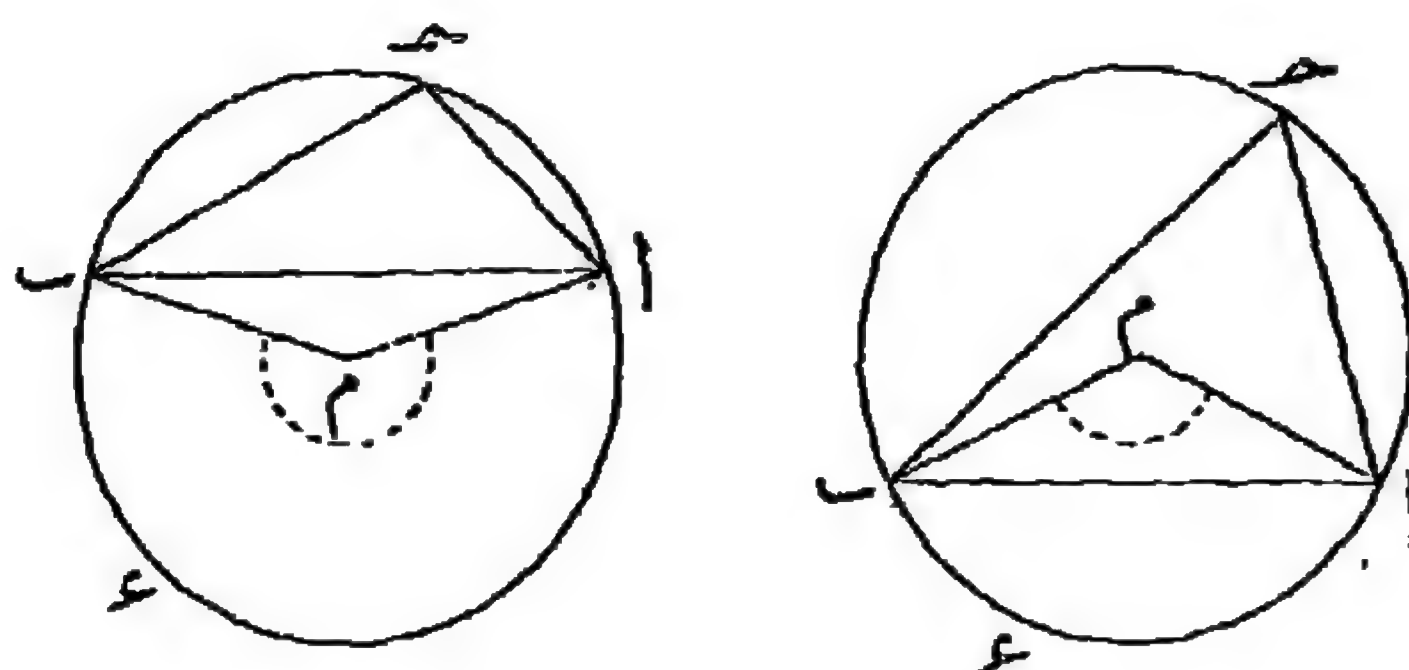
$$\angle ACB = 2 \angle AMB$$

$$\angle ACB = 2 \times 90^\circ = 180^\circ$$

$$\angle ACB = 90^\circ \quad \text{أي}$$

قائمة وهو المطلوب

نتيجة ^{كلم} — الزاوية المرسومة في قطعة أكبر من نصف الدائرة حادة والتي في قطعة أصغر من نصف الدائرة منفرجة



الزاوية المحيطية $\angle ACB$ تساوي نصف المركزية $\angle AOB$ لا اشترا كهما في قوس واحد AB
أولا — اذا كانت القطعة ACB أكبر من نصف الدائرة
فالقوس AB أصغر من نصف المحيط

$\therefore \angle AOB$ أصغر من قائمتين

$\therefore \angle ACB$ « » قائمة

ثانيا — اذا كانت القطعة ACB أصغر من نصف الدائرة

فالقوس AB أكبر من نصف المحيط

$\therefore \angle AOB$ أكبر من قائمتين

$\therefore \angle ACB$ « » قائمة

تمارين على نظرية ٤١

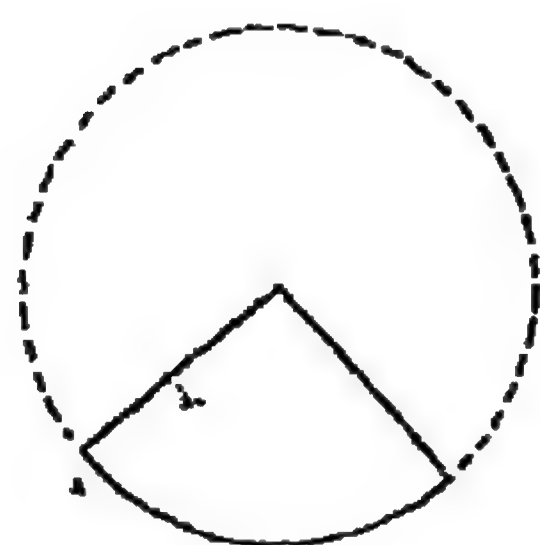
١ المعلوم مثلث قائم الزاوية والمطلوب إثبات أن محيط الدائرة التي قطرها وتر هذا المثلث يمر برأس الزاوية القائمة

٢ دائرتان متقاطعتان في A و B برهن على أنه اذا رسمنا من A القطر AC في إحدى الدائرتين والقطر AD في الأخرى كانت النقط C و B و D على استقامة واحدة

٣ اذا رسمنا دائرة قطرها أحد ساقى مثلث متساوي الساقين فان محيطها يمر بمنتصف قاعدته

٤ الدائرتان اللتان قطراهما ضامعا مثلث تتقاطعان في نقطة على الضلع الثالث أو على امتداده

٥ المطلوب إيجاد المحل الهندسي لمنتصف مستقيم طوله معين وطرفاه على مستقيمين متعامدين يتحرك بينهما

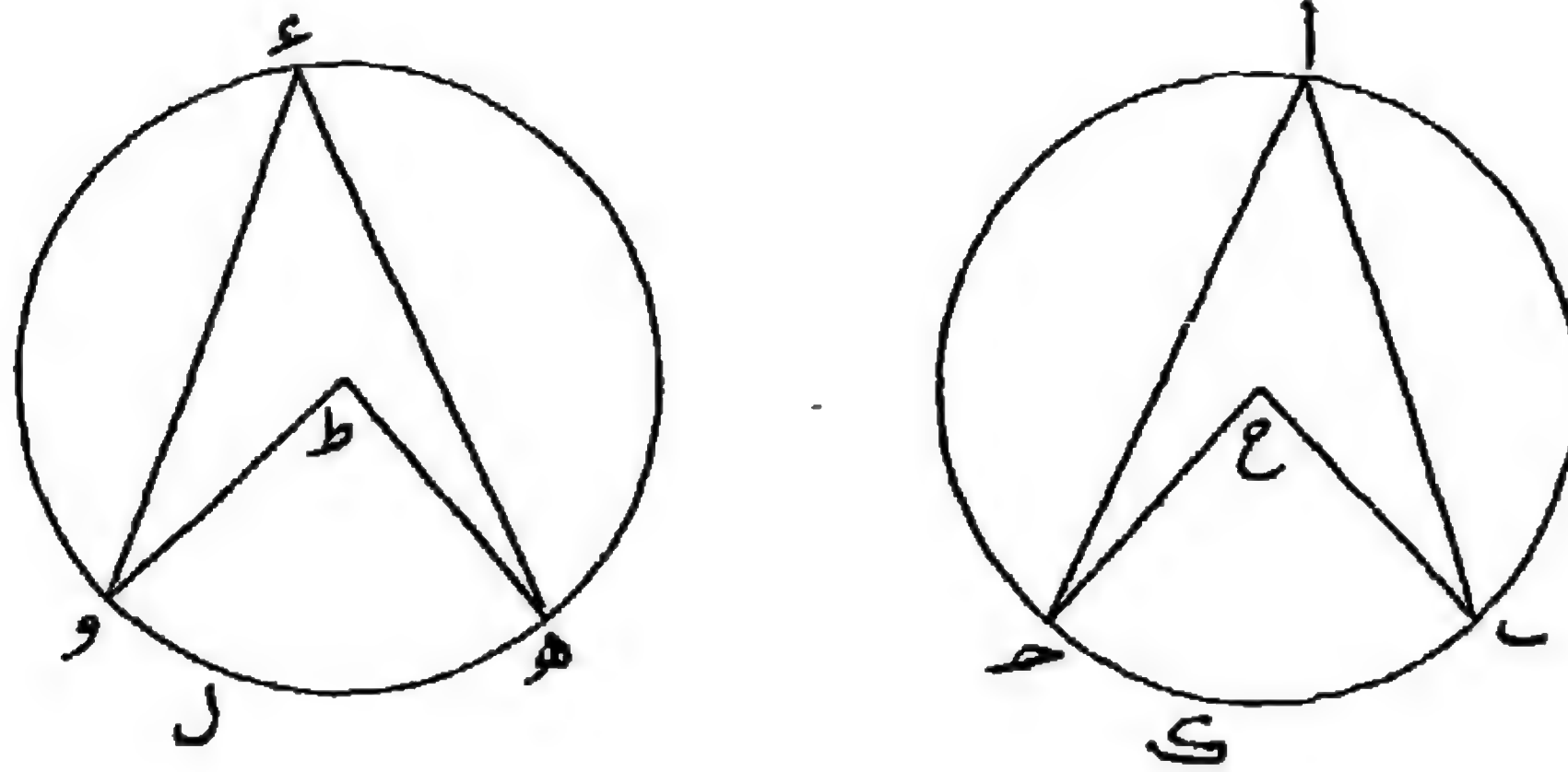


٦ المعلوم دائرة والمطلوب إيجاد المحل الهندسي لمنتصفات أوتارها المارة بنقطة معلومة سواء كانت هذه النقطة داخل الدائرة أو خارجة عنها أو على محيطها

تعريف — قطاع الدائرة هو جزؤها المحدود بنصفي قطرين والقوس المحصور بينهما

نظرية ٤٢

في الدوائر المتساوية إذا كانت الزوايا المركزية أو المحيطية متساوية كانت أقواسها متساوية



إذا فرضنا أن $\angle \alpha$ و $\angle \beta$ دائرتان متساويتان وأن الزاويتين المركزيتين $\angle \alpha$ و $\angle \beta$ متساويتان وعلى ذلك فالزاويتان المحيطيتان $\angle \alpha$ و $\angle \beta$ متساويتان (نظرية ٣٨)

فانه يطلب إثبات أن القوس $\alpha = \beta$ القوس α و

البرهان — نطبق الدائرة α ب β على الدائرة α و بحيث يقع المركز α على المركز β ونصف القطر α ب على نصف القطر β هـ

فمن حيث أن $\angle \alpha = \angle \beta$ و $\alpha = \beta$

∴ يقع α على β و لتساوى أنصاف الأقطار تقع α على β و ينطبق المحيطان كل على الآخر تمام الانطباق

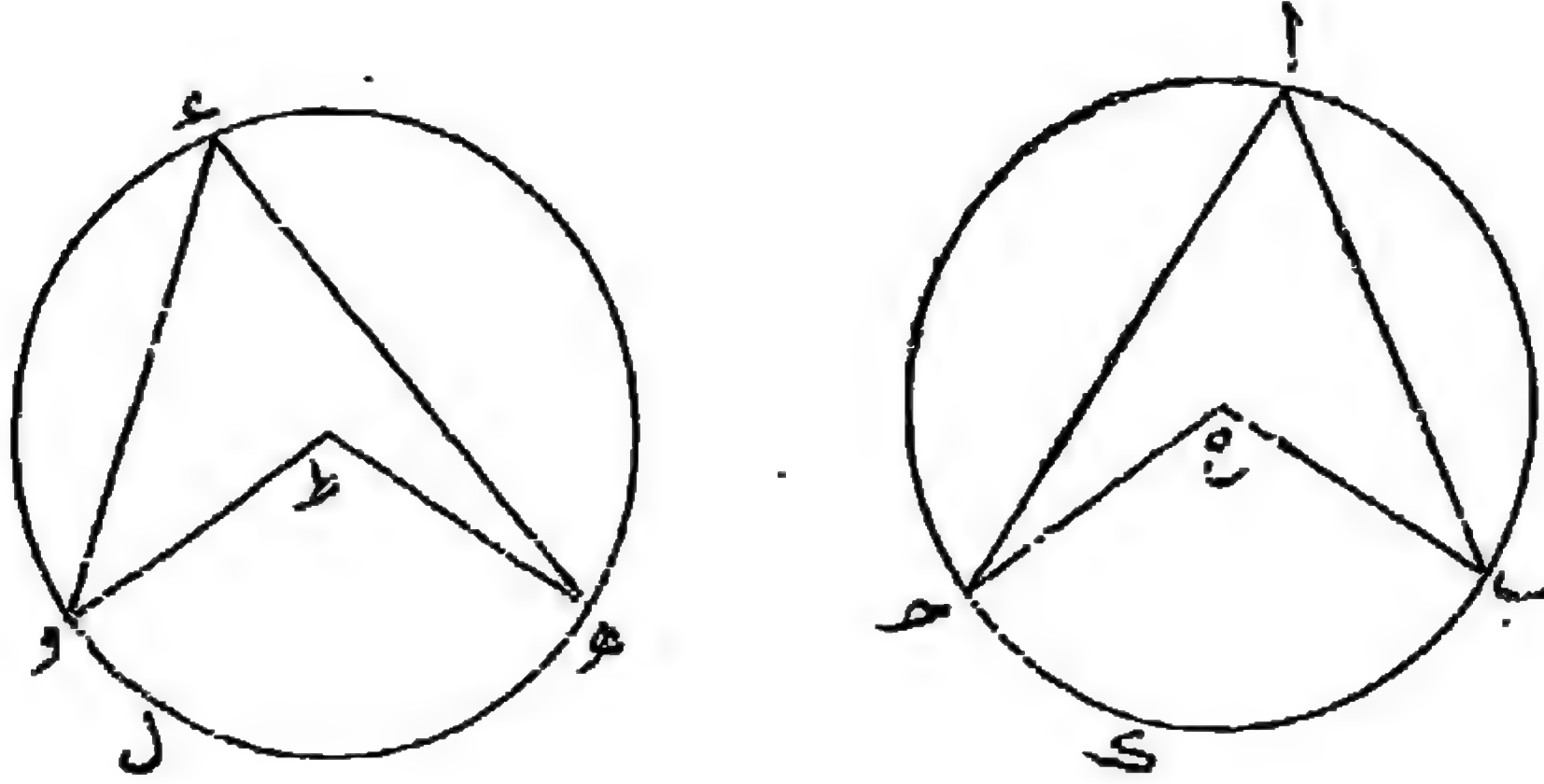
∴ القوس $\alpha = \beta$ ينطبق على القوس α و هو المطلوب

نتيجة — في الدوائر المتساوية تتساوى القطاعات إذا تساوت زواياها

ملاحظة — من الواضح أن النظريات الخاصة بالأقواس والزوايا والأوتار الواقعة في الدوائر المتساوية يمكن إثبات صحتها فيما لو كانت هذه الأقواس والزوايا والأوتار واقعة في دائرة واحدة

نظرية ٤٣

في الدوائر المتساوية تتساوى الزوايا المركزية أو المحيطية إذا تساوت أقواسها



نفرض أن $ا ب ح$ و $ك د هـ$ دائرتان متساويتان

وأن القوس $ب ك ح =$ القوس $هـ ل و$

ويراد إثبات أن الزاوية المركزية $ب ع ح =$ الزاوية المركزية $هـ ط و$

والزاوية المحيطية $ب ا ح =$ الزاوية المحيطية $هـ د و$

البرهان — نطبق الدائرة $ا ب ح$ على الدائرة $د هـ و$ على شرط أن يقع المركز $ع$ على المركز $ط$
 $ك$ على $ب$ على $هـ$

فلكون أنصاف أقطار الدائرتين متساوية

∴ تقع $ب$ على $هـ$ وينطبق المحيطان كل على الآخر تمام الانطباق

ولكون القوس $ب ك ح =$ القوس $هـ ل و$ فرضا

∴ تقع $ح$ على $و$

وبذا ينطبق $ع$ على $ط$ و

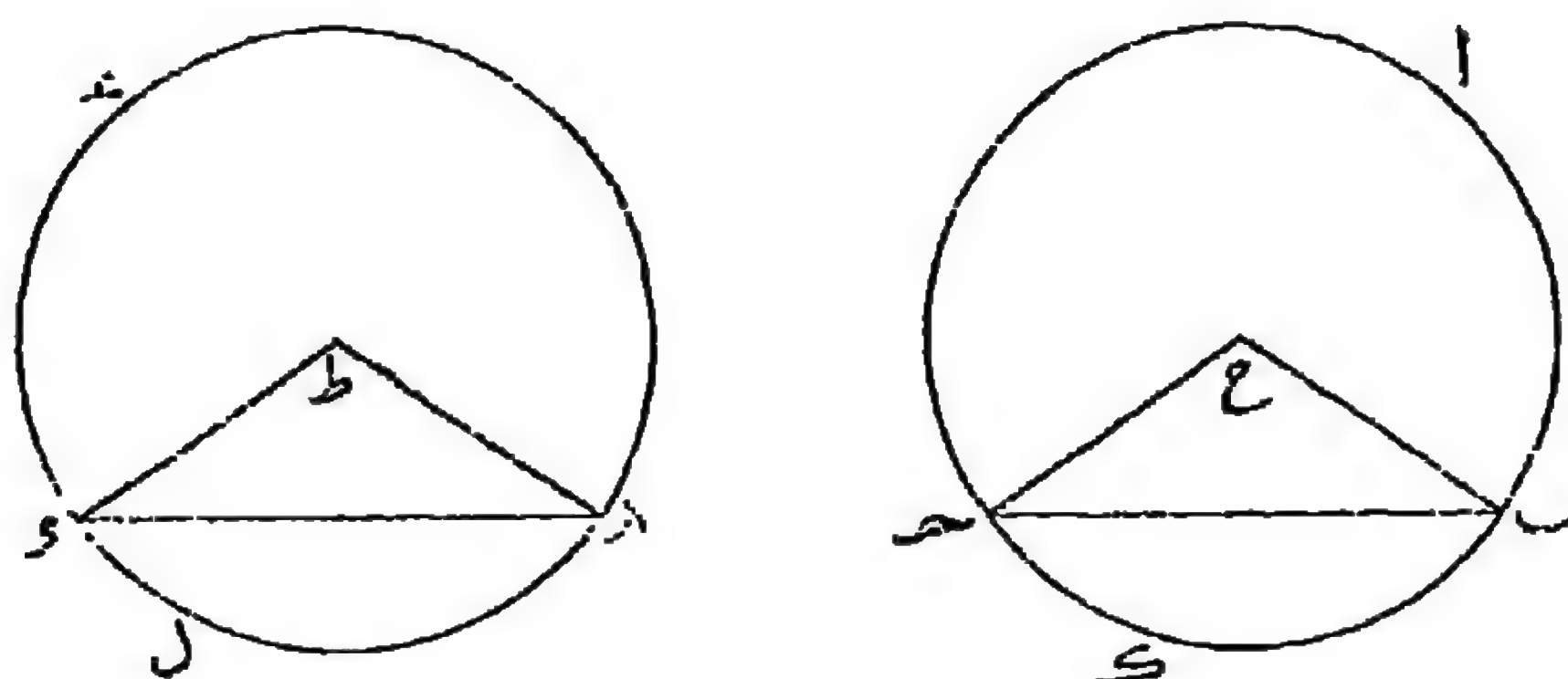
∴ $د ب ع ح = د هـ ط و$

ومن حيث أن الزاوية المحيطية $ب ا ح = \frac{1}{2}$ الزاوية المركزية $ب ع ح$

وكذلك $د هـ و = \frac{1}{2}$ $د هـ ط و$

∴ $د ب ا ح = د هـ و$ وهو المطلوب

في الدوائر المتساوية تتساوى الأقواس اذا تساوت أوتارها القوس الأكبر يساوى الأكبر والأصغر
يساوى الأصغر



البرهان — في ه ب ج ح د ه ط و

$$b \cdot h = c \cdot w$$

و ب = ٢٤ ٦

$$, \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cup \{ \}$$
$$\Delta \cup \mathcal{C} = \Delta \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{W}$$

القوس ب ك ح = القوس ه ل و

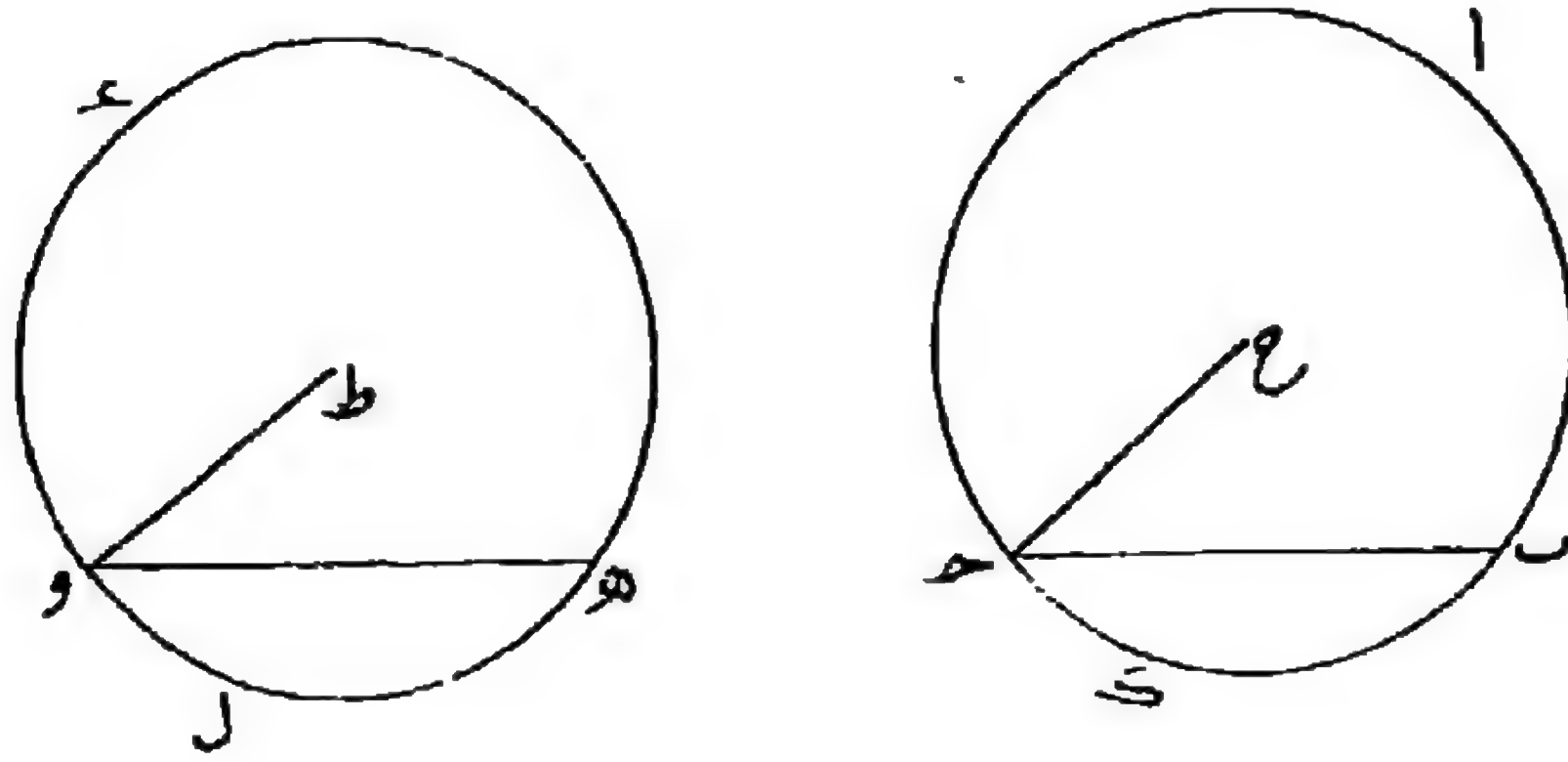
ومن حيث ان المحيط $ab \leq c =$ المحيط zhl و

∴ القوس الباقي ب ١ ح = القوس الباقي هـ د و

ای أن القوسین الأكبرین متساویان

نظرية ٤٥

في الدوائر المتساوية تتساوى الأوتار إذا تساوت أقواسها



إذا فرضنا أن $ا ب ح$ و $ك د ه$ دائرتان متساويتان
 مركزاهما $ع$ و $ط$ وأن القوس $ب ك ح =$ القوس $ه ل و$
 فإنه يطلب إثبات أن الوتر $ب ح =$ الوتر $ه و$
 لذلك نصل $ع$ و $ط$ و
 البرهان — نطبق الدائرة $ا ب ح$ على الدائرة $د ه و$ على شرط أن تقع $ع$ على $ط$ و $ك$ على $ل$ و
 فمن حيث أن أنصاف الأقطار متساوية
 ∴ تقع $ح$ على $و$ وينطبق المحيطان كل على الآخر تمام الانطباق
 ومن حيث أن القوس $ب ك ح =$ القوس $ه ل و$
 تقع $ب$ على $ه$
 ∴ ينطبق الوتر $ب ح$ على الوتر $ه و$ وهو المطلوب

تمارين على الزوايا في الدائرة

١ د نقطة مفروضة على قوس القطعة التي وترها AB برهن على أن مجموع الزاويتين $\angle CAB$ و $\angle CBA$ ثابت

٢ AB و AC وتران في دائرة متقاطعان في S برهن على أن زوايا $\angle ASB$ و $\angle ASC$ متساويتان

٣ دائرتان متقاطعتان في A و B رسمنا المستقيم AS يمر بالنقطة A وينتهي طرفاه S و C بالمحيطين برهن على أنه إذا وصل S و B و C و D ب AB ثابت في أي وضع للمستقيم AS

٤ دائرتان متقاطعتان في A و B رسمنا المستقيمين AD و AS مائزين بالنقطة A وطرفا كل منهما على المحيطين برهن على أن القوسين AD و AS يقابلان زاويتين متساويتين رأس كل منهما نقطة B

٥ د نقطة مفروضة على قوس قطعة وترها AB نصفت الزاويتان $\angle CAB$ و $\angle CBA$ بمستقيمين تقاطعا في M والمطلوب إيجاد المحل الهندسي لهذه النقطة M

٦ إذا تقاطع وتران داخل دائرة فان كل زاوية حادثة من تقاطعهما تساوي الزاوية المركزية المرسومة على نصف مجموع القوسين المحصور أحدهما بين ضلعي هذه الزاوية الحادثة والثاني بين امتداد هذين الضلعين

٧ إذا تقاطع وتران خارج دائرة فان الزاوية المحصورة بينهما تساوي الزاوية المركزية المرسومة على نصف الفرق بين القوسين المحصورين بينهما

٨ إذا تقاطع وتران داخل دائرة وكانا متعامدين فان مجموع كل قوسين متقابلين محصورين بينهما يساوي نصف المحيط

٩ AB وتر في دائرة معلومة C نقطة تتحرك على أحد القوسين المنقسم إليهما المحيط بهذا الوتر والمطلوب إثبات أن منتصف زاوية $\angle ACB$ يقابل القوس الآخر دائماً في نقطة ثابتة

١٠ إذا فرضت نقطة مثل A على محيط دائرة معلومة ورسم منها الوتران AB و AC وكانت D منتصف القوس الأصغر AB و E منتصف القوس الأصغر AC ثم وصل المستقيم DE فقطع AB في S و AC في V فانه يطلب إثبات أن $AS = AV$

١١ AB و AC مثلث مرسوم داخل دائرة نصفنا زواياه بمستقيمات تقابل المحيط في S و C و E برهن على أن زوايا المثلث SCS تساوي على الترتيب

$$90^\circ - \frac{1}{2} \angle A - \frac{1}{2} \angle B - \frac{1}{2} \angle C$$

١٢ - إذا فرضنا نقطة مثل \odot على أحد محيطي دائرتين متقاطعتين في a و b ومددنا منها إلى هاتين النقطتين مستقيمين فإنه يطلب إثبات أنه إذا مد هذان المستقيمان على استقامتهما فإنهما يحصران بينهما من المحيط الآخر قوسا مقداره ثابت مهما تغير وضع النقطة \odot

١٣ - يتساوى المستقيمان الواصلان بين طرفي وترين متوازيين في دائرة سواء كان الطرفان في جهة واحدة أو في جهتين مختلفتين

١٤ - a إحدى نقطتي تقاطع دائرتين متساويتين مر بها مستقيمان ينتهي طرفا كل منهما بالمحيطين فإذا كان أحد المستقيمين $\angle a$ والآخر $\angle s$ فبرهن على أن الوتر $\angle s =$ الوتر $\angle s$

١٥ - دائرتان متقاطعتان أثبت أنه إذا مر بنقطتي التقاطع مستقيمان متوازيان ومنتهيان بالمحيطين كان المستقيمان الواصلان بين طرفي هذين المتوازيين من جهة واحدة متساويين

١٦ - دائرتان متساويتان ومتقاطعتان في a و b برهن على أنه إذا رسم المستقيم $\angle a$ و d مازا بالنقطة a ومنتها بالمحيطين كان $\angle b = \angle s$

١٧ - a و b مثلث متساوي الساقين مرسوم داخل دائرة نصفت زاويتا القاعدة بمستقيمين مقابلان المحيط في s و k برهن على أنه يجب أن يوجد في الشكل b و s $\angle s$ أربعة أضلاع متساوية

واذكر العلاقة التي يجب أن ترتبط بها زوايا المثلث a و b حتى يصير الشكل b و s $\angle s$ متساوي الأضلاع

١٨ - a و b و d شكل رباعي مرسوم داخل دائرة مد الضلعان المتقابلان a و k و d على استقامتهما فتقابل في h والضلعان الآخران b و k و a فتقابل في e فإذا تقاطعت الدائرتان المرسومتان على المثلثين h و b و k و a في نقطة o فإن النقط الثلاث h و k و e يجب أن تكون على استقامة واحدة

١٩ - النقط s و k و e منتصفات أضلاع مثلث والنقطة d موقع العمود النازل من الرأس على القاعدة برهن على أنه يجب أن يمر بالنقط الأربع s و k و e و d محيط دائرة واحد

[راجع صفحة ٦٩ تمرين ٢ و صفحة ٨٨ عملية ١٠]

٢٠ - برهن بواسطة المسألة السابقة على أن منتصفات أضلاع المثلث ومواقع الأعمدة النازلة من رؤوسه على الأضلاع المقابلة لها يجب أن تكون كلها على محيط دائرة واحد

٢١ - إذا رسمت عدة مثلثات على قاعدة واحدة في جهة واحدة منها وكانت زوايا رؤوسها متساوية بأن ساوت زاوية معلومة فإن جميع منتصفات هذه الزوايا لتقابل في نقطة واحدة

٢٢ - a و b مثلث مرسوم داخل دائرة ونقطة h منتصف القوس b و غير الذي فيه a فإذا رسمنا من h القطر h كانت d و e a مساوية نصف الفرق بين الزاويتين b و k

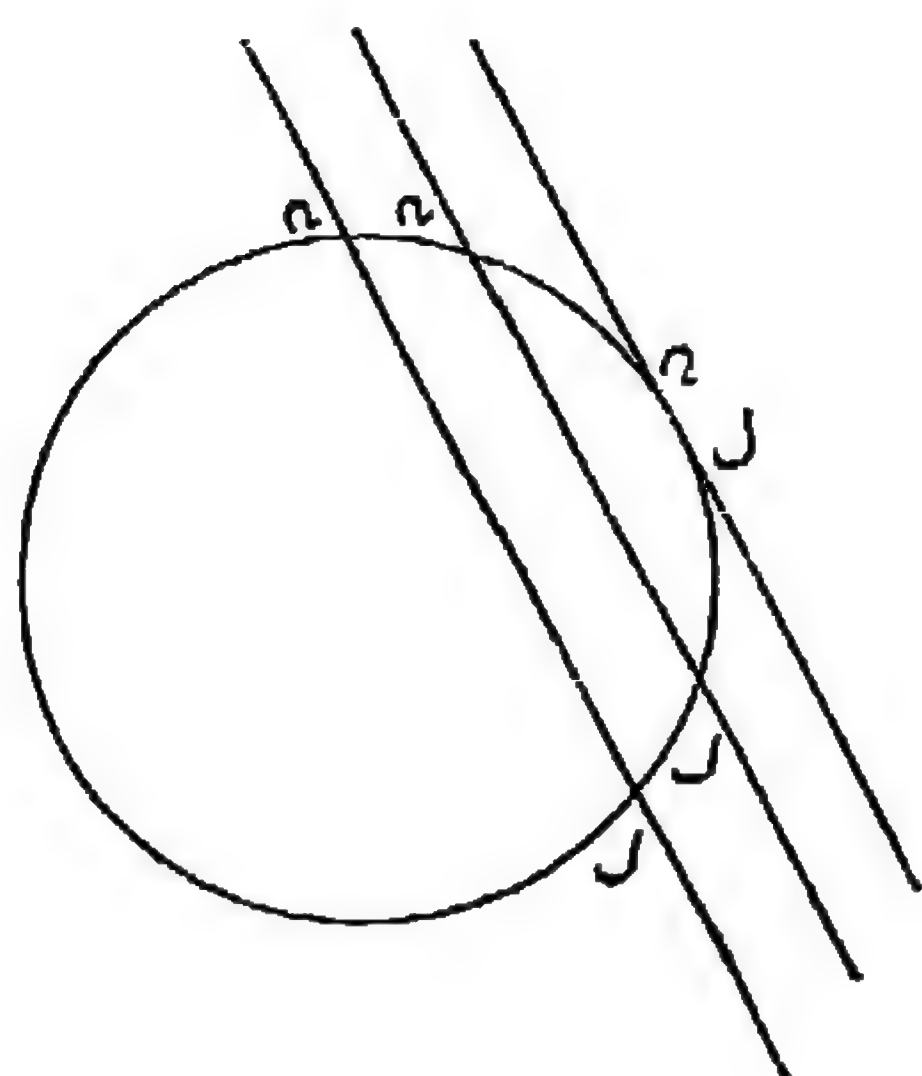
في التماس

(تعريف ومبادئ أولية)

١ قاطع الدائرة هو المستقيم الذي يقطع محيطها في نقطتين

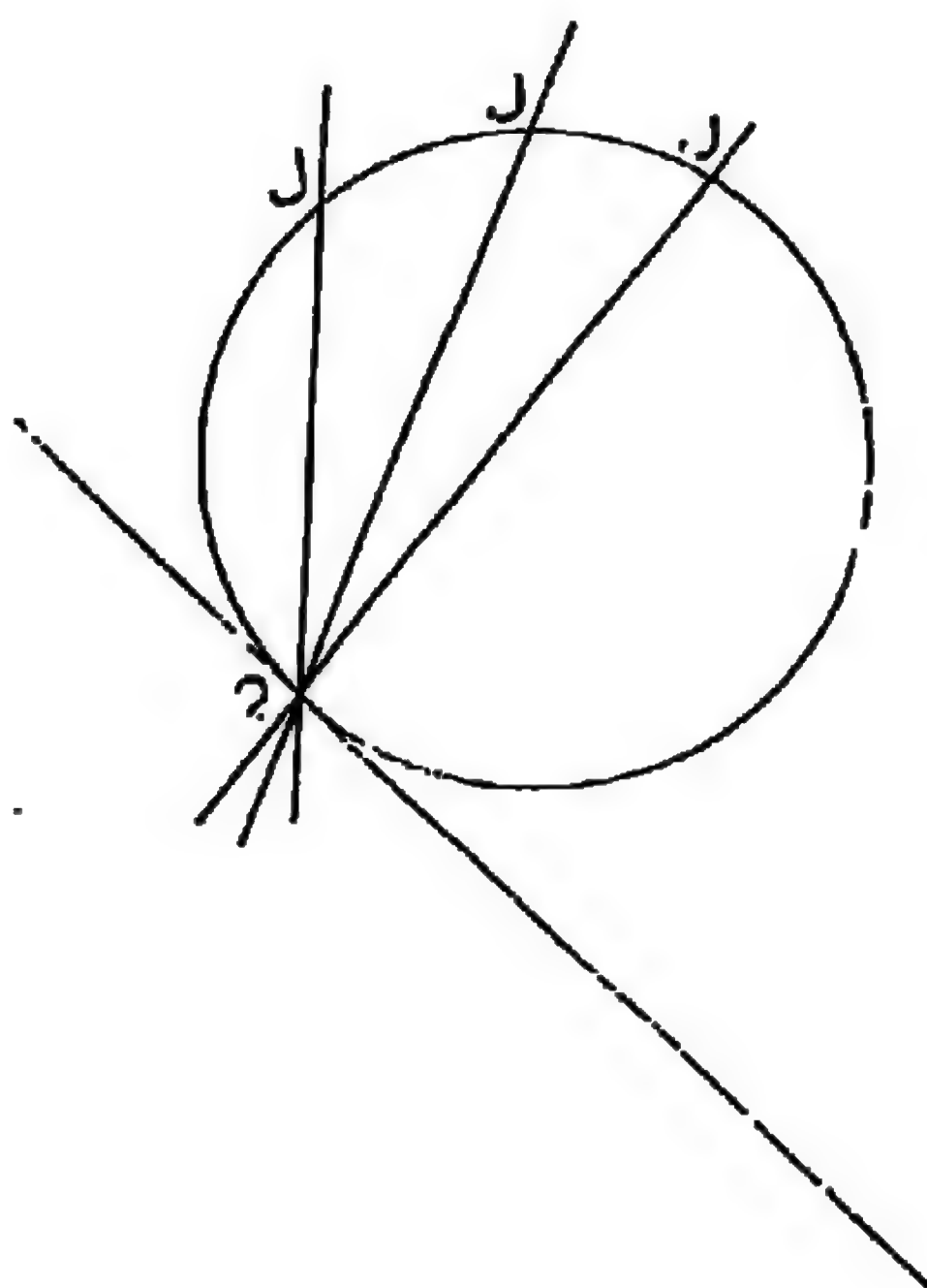
٢ إذا تحرك قاطع الدائرة بحيث تقترب نقطتا التقاطع كل من الأخرى شيئا فشيئا حتى تتحدا فان القاطع في هذا الوضع النهائي يصير مماسا للدائرة في هذه النقطة التي تسمى نقطة التماس

مثال ذلك



أولا — اذا فرضنا أن مستقيما قطع الدائرة في النقطتين ل و ك وتصورنا أنه يبتعد عن المركز شيئا فشيئا موازيا لنفسه فان النقطتين ل و ك تقتربان كلما ابتعد القاطع عن مركز الدائرة حتى يأتي وضع فيه تتحدان

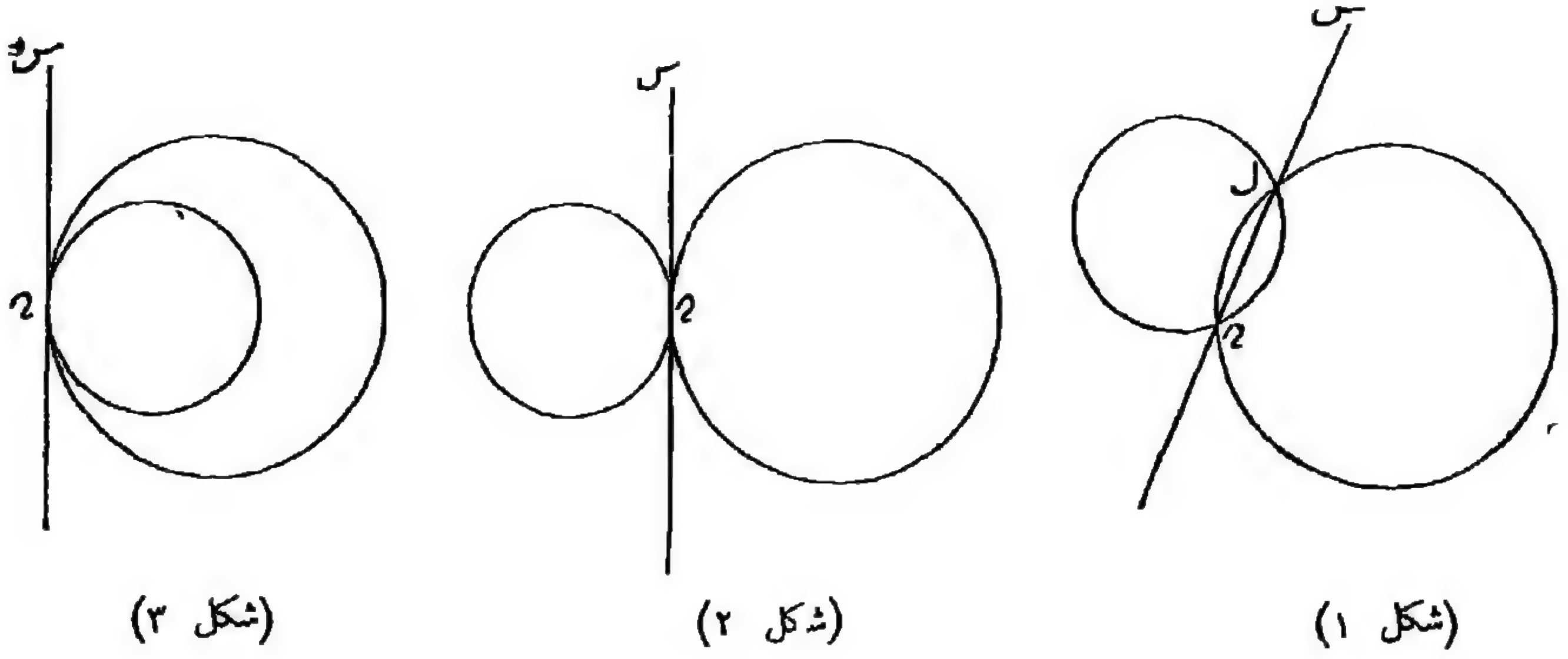
أي أن النقطتين ل و ك تصيران في الوضع النهائي نقطة واحدة ويصير القاطع حينئذ مماسا للدائرة في هذه النقطة



ثانيا — اذا فرضنا أن المستقيم قطع الدائرة في النقطتين ل و ك وتصورنا دورانه حول نقطة د وهي ثابتة فان نقطة ل أثناء الدوران تتحرك على المحيط مقتربة شيئا فشيئا من ك حتى يأتي وضع فيه تقع ل على ك ويصير القاطع حينئذ مماسا للدائرة

ومن حيث ان القاطع لا يشترك مع المحيط الا في نقطتين فمن الواضح أن التماس لا يشترك معه إلا في نقطة واحدة هي نقطة التماس التي فيها تتحد نقطتا التقاطع ومن ذلك نستخلص التعريف الآتي

٣ مماس الدائرة هو المستقيم الذي لا يشترك مع المحيط إلا في نقطة واحدة مهما امتد



٤ إذا تقاطعت دائرتان في نقطتين ل و ٦ (شكل ١) وتصورنا تحرك أحد المحيطين حول ٥ بحيث تكون هذه النقطة ثابتة وبحيث أن النقطة الأخرى ل تقترب منها شيئاً فشيئاً فإنه يأتي وضع فيه تقع ل على ٥ (شكلي ٢ و ٣) ويقال للدائرتين حينئذ إنهما متماستان في نقطة ٥

ومن حيث أن الدائرتين لا يمكن أن يتقاطعا في أكثر من نقطتين فالدائرتان المتماستان لا يمكن أن تشتركا إلا في نقطة واحدة هي نقطة التماس التي فيها تتحد نقطتا تقاطع المحيطين وعلى ذلك لا يقال أن الدائرتين متماستان إلا إذا اشتركتا في نقطة واحدة فقط

تنبيه — إذا كانت إحدى الدائرتين المتماستين خارج الدائرة الأخرى (شكل ٢) يقال إنهما متماستان من الخارج وإذا كانت أحدهما داخل الأخرى فتماستان من الداخل (شكل ٣)

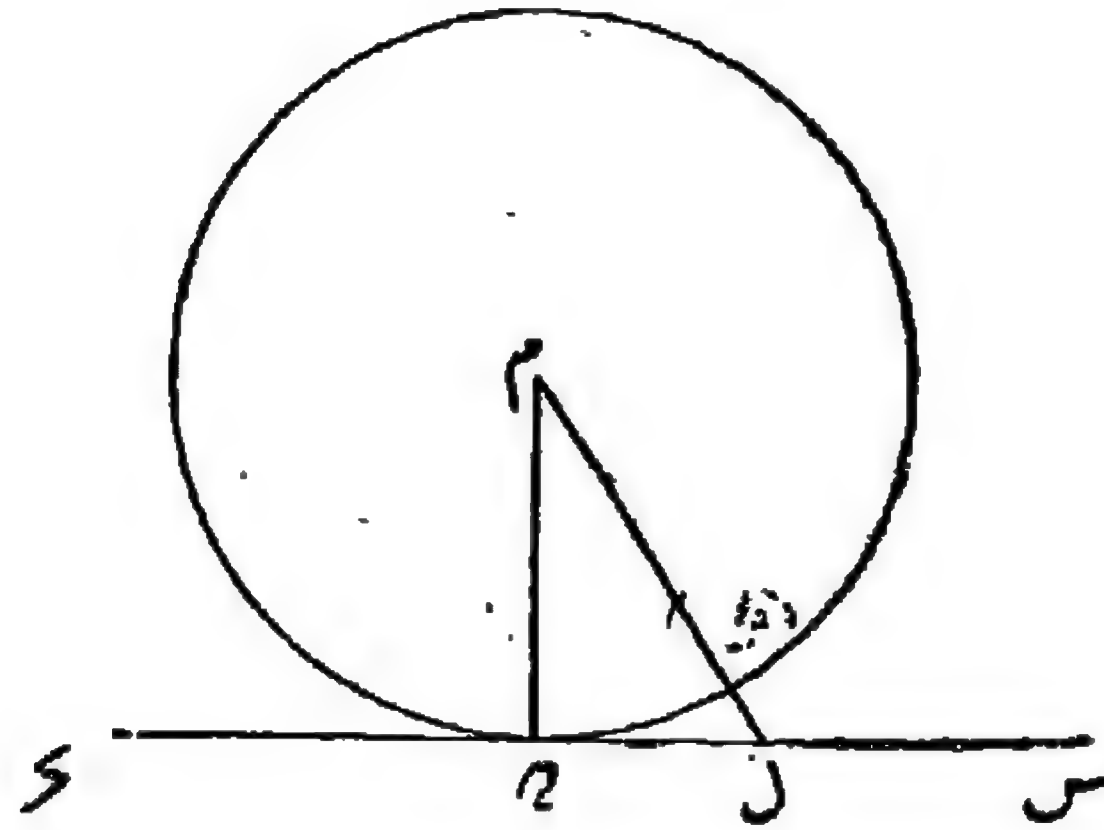
استنتاج من التعريفين ٢ و ٤

إذا فرضنا أن س ل ٥ وتر مشترك بين دائرتين متقاطعتين (شكل ١) وأن إحدى الدائرتين تتحرك حول ٥ بحيث تكون هذه النقطة ثابتة فإن المستقيم س ٥ في حال وقوع ل على ٥ يمر بنقطتين متحدين ولا يزال كل منهما على محيطي الدائرتين المذكورتين (شكلي ٢ و ٣) وعلى ذلك يكون هذا المستقيم مماساً لكل من الدائرتين وحينئذ

فلكل دائرتين متماستين مماس مشترك في نقطة تماسهما

نظرية ٤٦

مماس الدائرة في نقطة ما من المحيط عمود على نصف القطر المار بنقطة التماس



إذا فرضنا أن $S \perp$ يمس الدائرة التي مركزها M في نقطة N

فانه يطلب إثبات أن $S \perp$ عمود على MN

البرهان — نفرض نقطة ما مثل L على $S \perp$ ونصل M ل

فن حيث أن $S \perp$ مماس للدائرة في N فكل نقطة غيرها يجب أن تكون خارج الدائرة

$\therefore M$ ل أكبر من نصف القطر MN

ومن حيث أن أي نقطة أخرى غير N على المستقيم $S \perp$ خارجة عن محيط الدائرة

$\therefore M$ أصغر الأبعاد التي يمكن رسمها من M إلى $S \perp$

فيكون $MN \perp$ عمودا على $S \perp$ (نظرية ١٢ نتيجة ١) وهو المطلوب

نتيجة ١ — من حيث أنه لا يمكن أن يقام إلا عمود واحد من N على $S \perp$ ينتج أنه لا يمكن أن يمد إلا مماس واحد لدائرة من نقطة مفروضة على محيطها

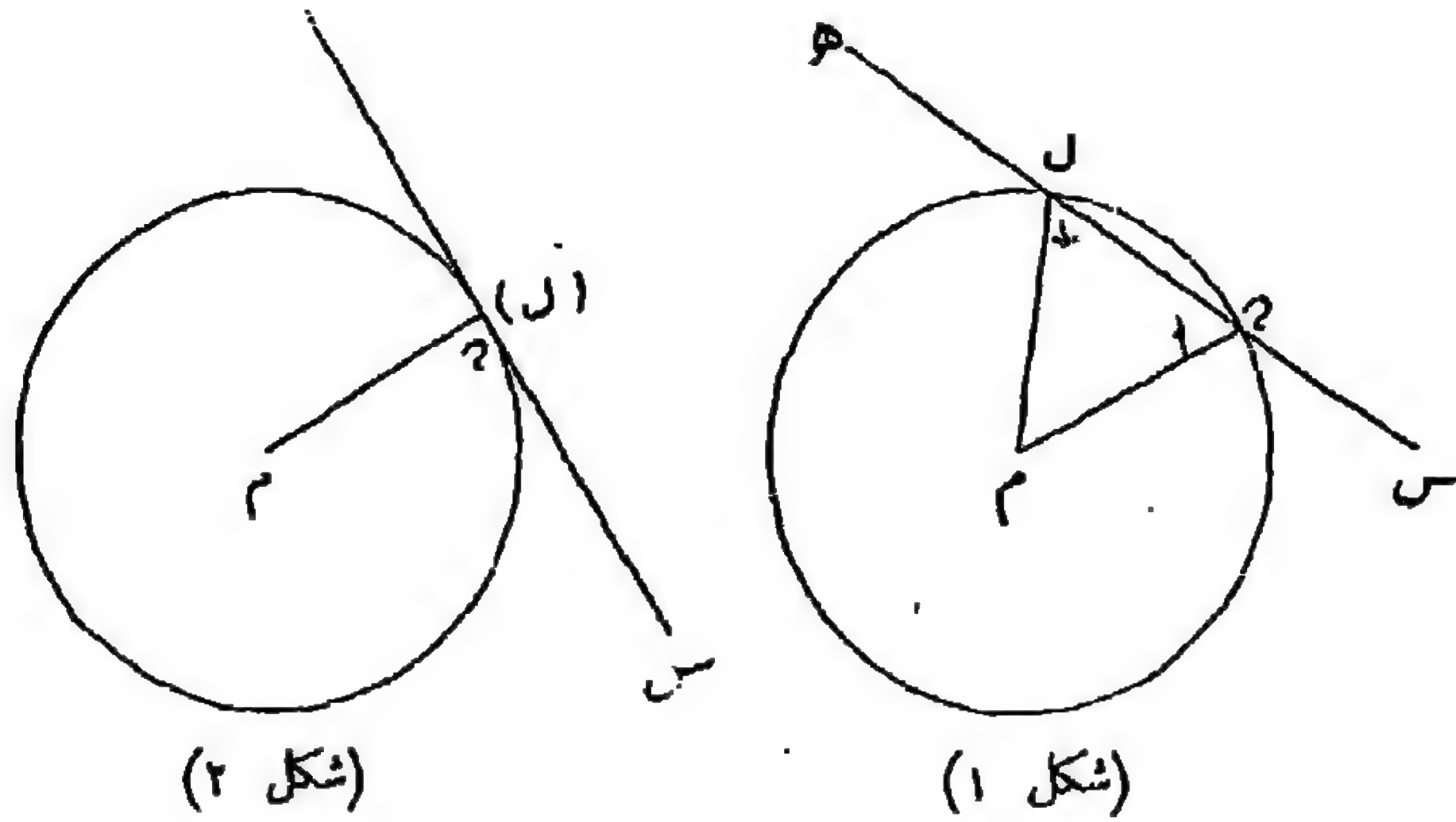
نتيجة ٢ — من حيث أنه لا يمكن أن يقام إلا عمود واحد من N على $S \perp$ ينتج أن العمود المقام على المماس من نقطة التماس لابد أن يمر بالمركز

نتيجة ٣ — من حيث أنه لا يمكن أن ينزل إلا عمود واحد من M على المستقيم $S \perp$ ينتج أن نصف القطر العمودي على المماس لابد أن يمر بنقطة التماس

نظرية ٤٦

(طريقة نهاية الأوضاع)

مماس الدائرة في نقطة ما من المحيط عمود على نصف القطر المار بنقطة التماس



إذا فرضنا أن \angle نقطة على محيط دائرة مركزها م
فانه يطلب إثبات أن مماس هذه الدائرة في \angle عمود على نصف القطر م \angle
لذلك نرسم المستقيم هـ ل \angle س قاطعا للدائرة في ل \angle (شكل ١) ثم نصل م ل م \angle م \angle
البرهان — من حيث أن \angle م \angle = \angle م ل \angle
 \angle م ل \angle = \angle م ل \angle \angle م ل \angle
مكملتا هاتين الزاويتين متساويتان \angle
أي أن \angle م ل هـ = \angle م ل س

وهذا حقيقى مهما اقتربت ل من \angle
وعلى ذلك اذا دار القاطع ل \angle حول نقطة \angle بحيث تكون هذه النقطة ثابتة وبحيث تقترب منها
ل شيئا فشيئا حتى تقع عليها يحدث في ذلك الوضع النهائى أن
(١) القاطع هـ س يمس الدائرة في \angle (شكل ٢)
(٢) م ل ينطبق على م \angle
فتصير بذلك الزاويتان المتساويتان م ل هـ م ل س متجاورتين

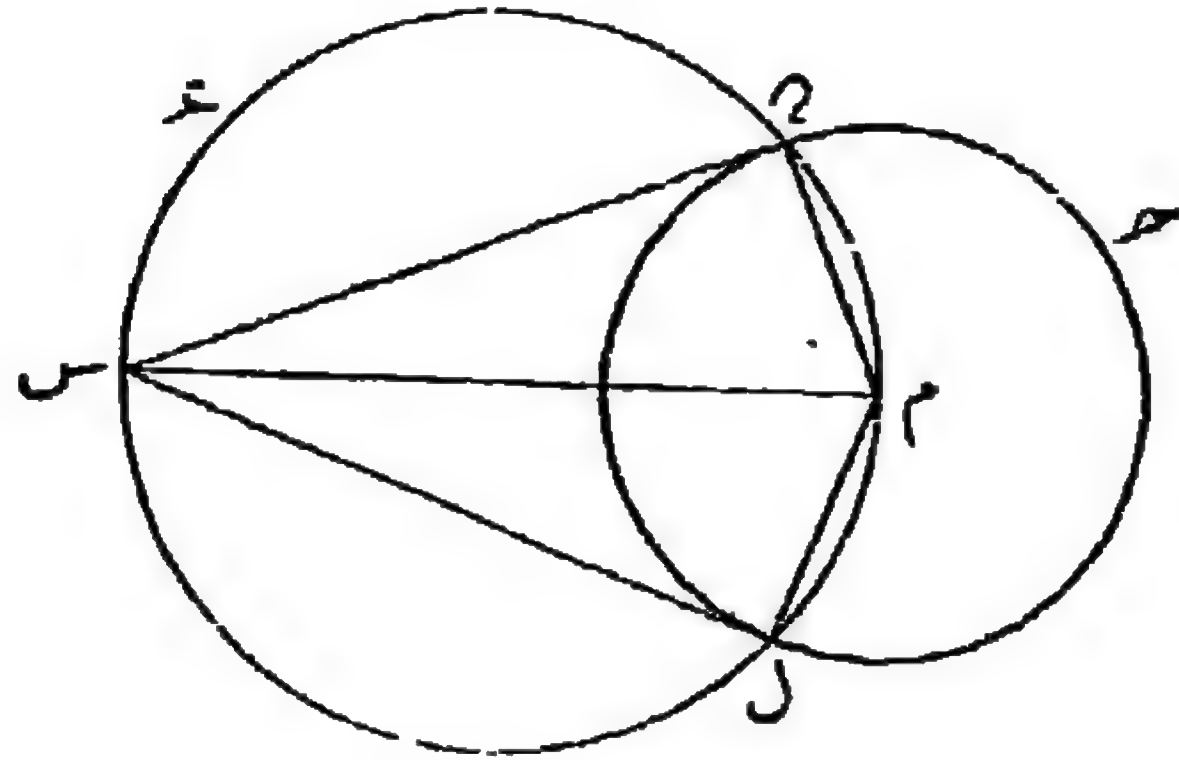
وهو المطلوب

م \angle عمود على هـ س

نتبيه — الطريقة المستعملة في هذا البرهان تعرف بطريقة نهاية الأوضاع

نظرية ٤٧

يمكن أن يمد من نقطة خارج دائرة مماسان لمحيطها



إذا فرضنا أن $L \in \odot$ دائرة مركزها M و S نقطة خارجة عنها
فانه يطلب إثبات أنه يمكن مد مماسين من S الى المحيط
فلنصل M S ونرسم الدائرة M S التي قطرها M S فهذه الدائرة تقطع الدائرة المعلومة
في النقطتين L و K

نصل S L و S K و M L و M K و

البرهان — من حيث ان كلا من الزاويتين S L M و S K M مرسومة في نصف دائرة

\therefore S L عمود على M L و S K عمود على M K و

\therefore S L و S K مماسان للدائرة في L و K (نظرية ٤٦) وهو المطلوب

نتيجة — اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها مماسان لها كانا متساويين ومقابلين لزاويتين مركبتين
متساويتين

لأنه في المثلثين S L M و S K M

بالقيام

$$\angle SLM = \angle SKM$$

M S مشترك

$$\angle MSL = \angle MSK$$

من حيث ان

$$S$$

\therefore

(نظرية ١٨)

$$SL = SK$$

و

تمارين على التماس

(مسائل عددية وتخطيطية)

١ ارسم دائرتين متحدتين في المركز نصف قطرها ٥ سنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٣ سنتيمترات ثم ارسم عدة أوتار في الدائرة الكبرى تمس محيط الصغرى واستخرج أطوالها بالحساب وقسها وبرهن على تساويها

٢ ارسم عدة أوتار طول كل منها ١,٦ من البوصات داخل دائرة نصف قطرها بوصة وبرهن على أن جميعها تمس دائرة متحدة في المركز مع الأولى ثم أوجد نصف قطر هذه الدائرة

٣ دائرتان متحدتا المركز قطرها ١٠ سنتيمترات وقطر الأخرى ٥ سنتيمترات أوجد طول أي وتر في الدائرة الخارجة يمس محيط الداخلة لأقرب مليمتراً ثم حقق الناتج بالقياس

٤ في شكل نظرية ٤٧ إذا فرض أن $ل م = ١,٢٥$ من الأمتار $م س = ٣,٢٥$ من الأمتار فما طول كل من المماسين المرسومين من س ارسم الشكل (بقياس سنتيمترين لكل متر) وقس لأقرب درجة الزاويتين اللتين رأس كل منهما المركز م واللّتين يقابلان المماسين المذكورين

٥ دائرة نصف قطرها ١,٤ من السنتيمترات ٦ س نقطة خارجها رسم مماسان للمحيط وكان طول كل منهما ٨ من السنتيمترات ما بعد س عن مركز الدائرة ارسم الشكل وحقق الناتج بالقياس

(مسائل نظرية)

٦ مركز الدائرة التي يمسا مستقيمان متقاطعان يقع على منتصف الزاوية المحصورة بينهما

٧ ا ب ٦ ا ح مماسان لمحيط دائرة مركزها م برهن على أن ا م ينصف الوتر ب ح الواصل بين نقطتي التماس ويكون عموداً عليه

٨ في شكل نظرية ٤٧ إذا وصلنا المستقيم ل ح حدث أن $ل م = ٢$ $ل س = ٣$

٩ إذا رسمنا مماساً لمحيط دائرة يقطع مماسين آخرين متوازيين فان جزء هذا المماس المحصور بين مماسين المتوازيين يقابل زاوية قائمة رأسها مركز الدائرة

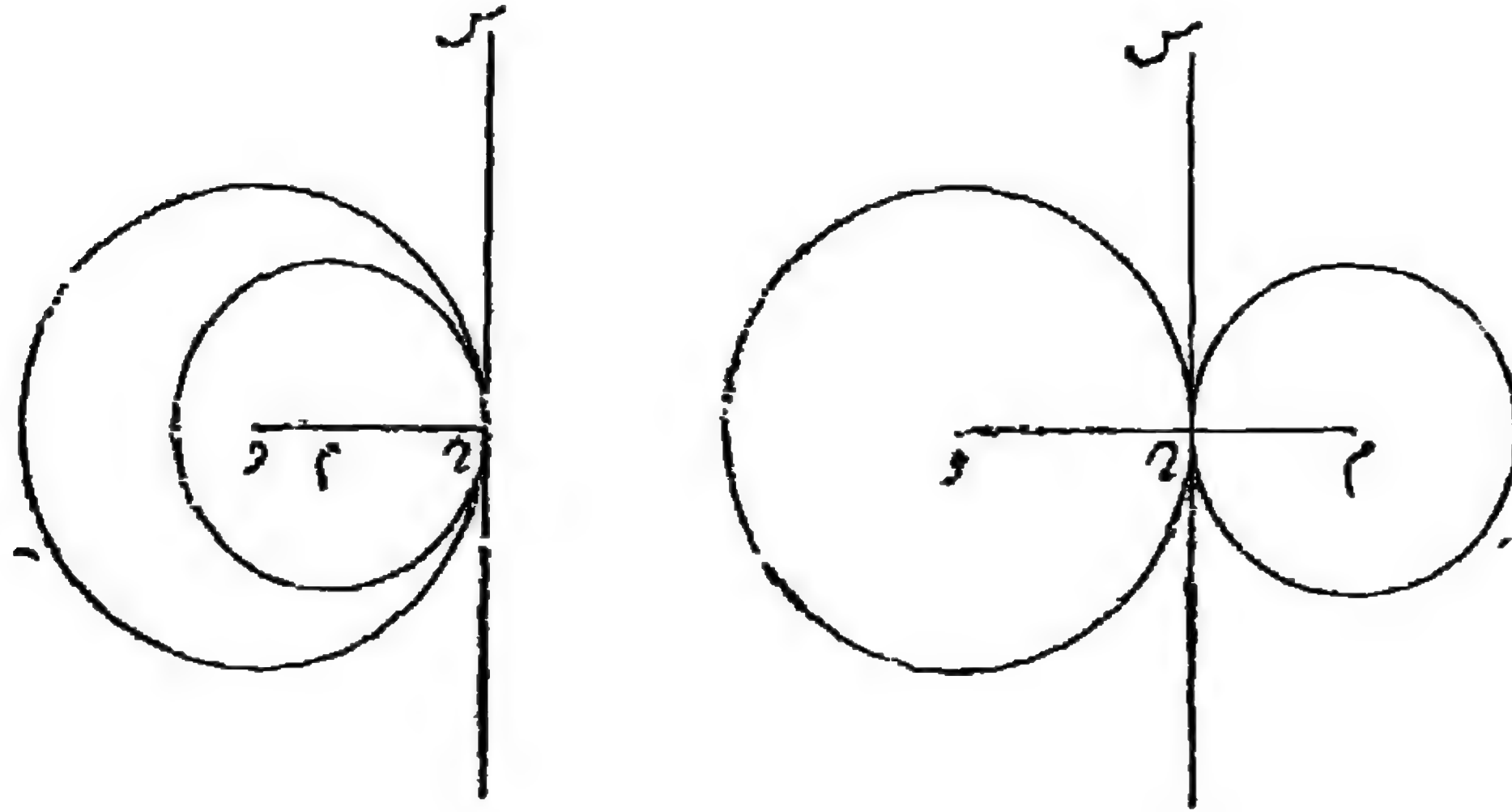
١٠ قطر الدائرة ينصف جميع الأوتار الموازية لأحد المماسين المرسومين من طرف هذا القطر

- ١١ المطلوب إيجاد المحل الهندسى لمراكز الدوائر التى تمس مستقيما معلوما فى نقطة مفروضة عليه
- ١٢ المطلوب إيجاد المحل الهندسى لمراكز الدوائر التى تمس كلا من مستقيمين متوازيين غير محدودين
- ١٣ المطلوب إيجاد المحل الهندسى لمراكز الدوائر التى تمس كلا من مستقيمين متقاطعين غير محدودين
- ١٤ اذا رسم أى شكل رباعى خارج^(١) دائرة فان مجموع كل ضلعين متقابلين يساوى مجموع الضلعين الآخرين أذكر عكس هذه النظرية وبرهن عليه
- ١٥ اذا رسم أى شكل رباعى خارج دائرة فان الزاويتين المركزيتين للمقابلتين لضلعين متقابلين من أضلاع الشكل متكاملتان

(١) الشكل المرسوم خارج الدائرة ما كانت أضلاعه ماسة لمحيطها

نظرية ٨٤

إذا تماس محيطا دائرتين كانت نقطة التماس على خط المراكز



إذا فرضنا أن الدائرتين اللتين مركزاهما M و O متماستان في S

فانه يطلب إثبات أن هذه النقطة إحدى نقط المستقيم OM و

لذلك نصل OM و S

البرهان — من حيث أن الدائرتين متماستان في S فلهما مماس مشترك في هذه النقطة (صفحة ١٩١) وليكن S

ومن حيث أن كلا من نصفى القطرين OM و S ماز بنقطة التماس

\therefore كل من OM و S عمود على S

$\therefore OM$ و S على استقامة واحدة (نظرية ٢)

أى أن S على خط المراكز وهو المطلوب

نتيجة ١ — إذا تماس دائرتان من الخارج فإن البعد بين مركزيهما يساوى مجموع نصفى القطرين

نتيجة ٢ — إذا تماس دائرتان من الداخل فإن البعد بين مركزيهما يساوى الفرق بين نصفى القطرين

تمارين على الدوائر المتماسّة

(مسائل عديدة وتخطيطية)

١ ارسم دائرتين البعد بين مركزيهما $٢,٥$ من السنتيمترات ونصف قطرها $٤,٣$ من السنتيمترات

والثانية $٨,١$ من السنتيمترات . لم يتماسان وأين نقطة تماسهما

وإذا كان البعد بين مركزي هاتين الدائرتين $١,٦$ من السنتيمترات فبرهن على أنهما يتماسان وإذا كرر

الفرق بين هذه الحالة والحالة المتقدمة

٢ ارسم المثلث abc الذى ضلعه $a = 8$ سنتيمترات $b = 6$ $c = 7$ سنتيمترات $6 = c = 7$ سنتيمترات ثم اركز في رؤوسه a b c وارسم دوائر أنصاف أقطارها على الترتيب $2, 5, 3$ من السنتيمترات $6, 3, 5$ من السنتيمترات $6, 5, 4$ من السنتيمترات وبرهن على أنها تماس مثنى 2

٣ abc مثلث قائم الزاوية في c ضلعه $a = 8$ سنتيمترات $b = 6$ $c = 7$ سنتيمترات وركز في رأسه a ورسم دائرة نصف قطرها 7 سنتيمترات ماطول نصف قطر الدائرة التي مركزها b والتي يجب أن تماس الدائرة الأولى

٤ a b مركزا دائرتين ثابتتين متماستين من الداخل c مركز أى دائرة أخرى تماس الدائرة الكبرى من الداخل والصغرى من الخارج برهن على أن $a + b = c$ ثابت

وإذا كان نصف قطرى الدائرتين الثابتتين 5 سنتيمترات 6 سنتيمترات فإنه يطلب تحقيق الناتج بتغيير موضع المركز c

٥ ab مستقيم طوله 4 بوصات نصفناه في c ورسمنا على كل من a b c نصف محيط دائرة بين أن نصف قطر الدائرة المحصورة بين ثلاثة أنصاف المحيطات ماسة كلاهما يجب أن يكون $\frac{2}{3}$ البوصة

(مسائل نظرية)

٦ إذا رسمنا مستقيما يمر بنقطة تماس دائرتين مركزاهما a b ويقطع الأولى في l والثانية في c فبرهن على أن نصفى القطرين al bc متوازيان

٧ إذا رسم مستقيم يمر بنقطة تماس دائرتين متماستين من الخارج وينتهى بالمحيطين فبرهن على أن المماسين للدائرتين من طرفى المستقيم المذكور متوازيان

٨ المطلوب إيجاد المحل الهندسى لمراكز الدوائر

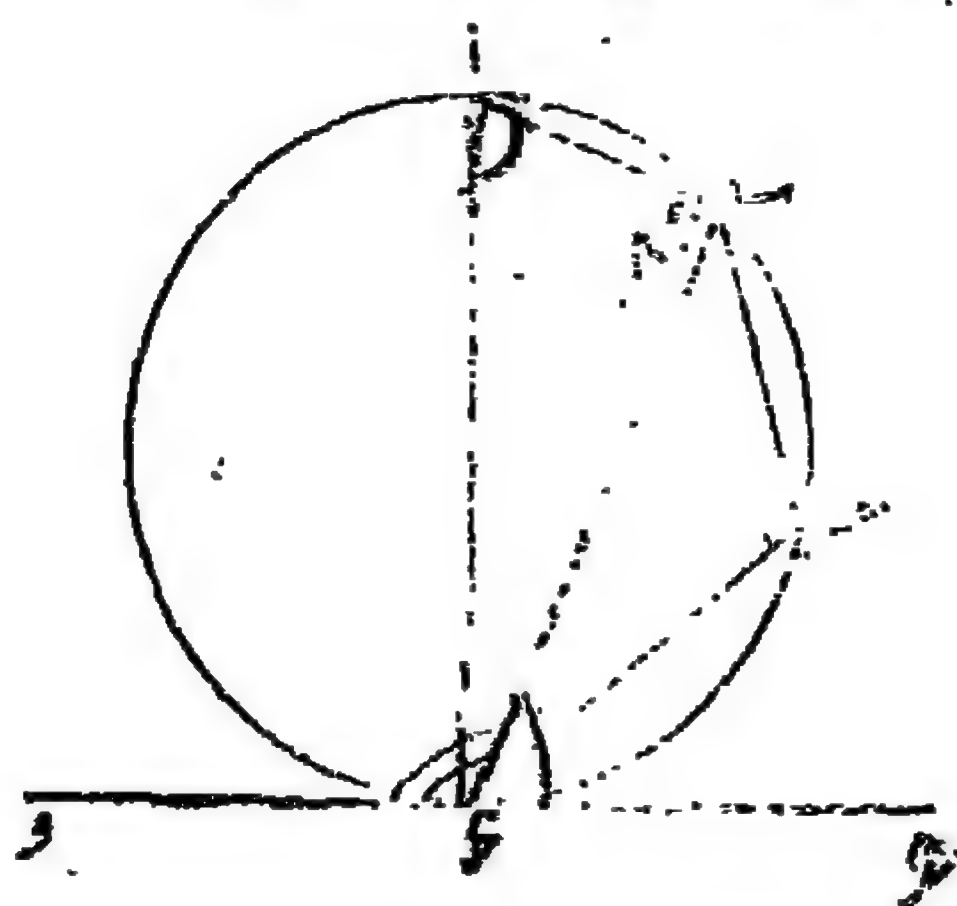
(أولا) التي تماس دائرة معلومة في نقطة معلومة

(ثانيا) التي نصف قطرها معلوم وتماس دائرة معلومة

٩ المطلوب رسم دائرة مركزها معلوم تماس دائرة معلومة كم حلا لهذه المسألة

١٠ المطلوب رسم دائرة نصف قطرها معلوم تماس دائرة أخرى معلومة في نقطة مفروضة على محيطها كم حلا لهذه المسألة

الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة ووترها المار بنقطة التماس والواقعة في احدى جهتي الوتر تساوى الزاوية المحيطية المرسومة على هذا الوتر في الجهة الأخرى منه



∴ $D \cup D = D$ و $D \cap D = D$ المرسومة على الترتي في الجهة الأخرى وهو المطلوب

تمارين على نظرية ٤٩

١ في شكل نظرية ٤٩ اذا كانت $d = 72$ فما مقدار كل من الزوايا a و b

٢ برهن بواسطة هذه النظرية على أن المماسين لدائرة من نمطة معلومة خارجها متساويان

٣ دائرتان متماستان في a رسمنا مستقيمين يمران بها ويقطعان إحدى الدائرتين في l و m والأخرى في s و 6 ص برهن على أن l و m يوازي s سواء كان التماس من الداخل أو من الخارج

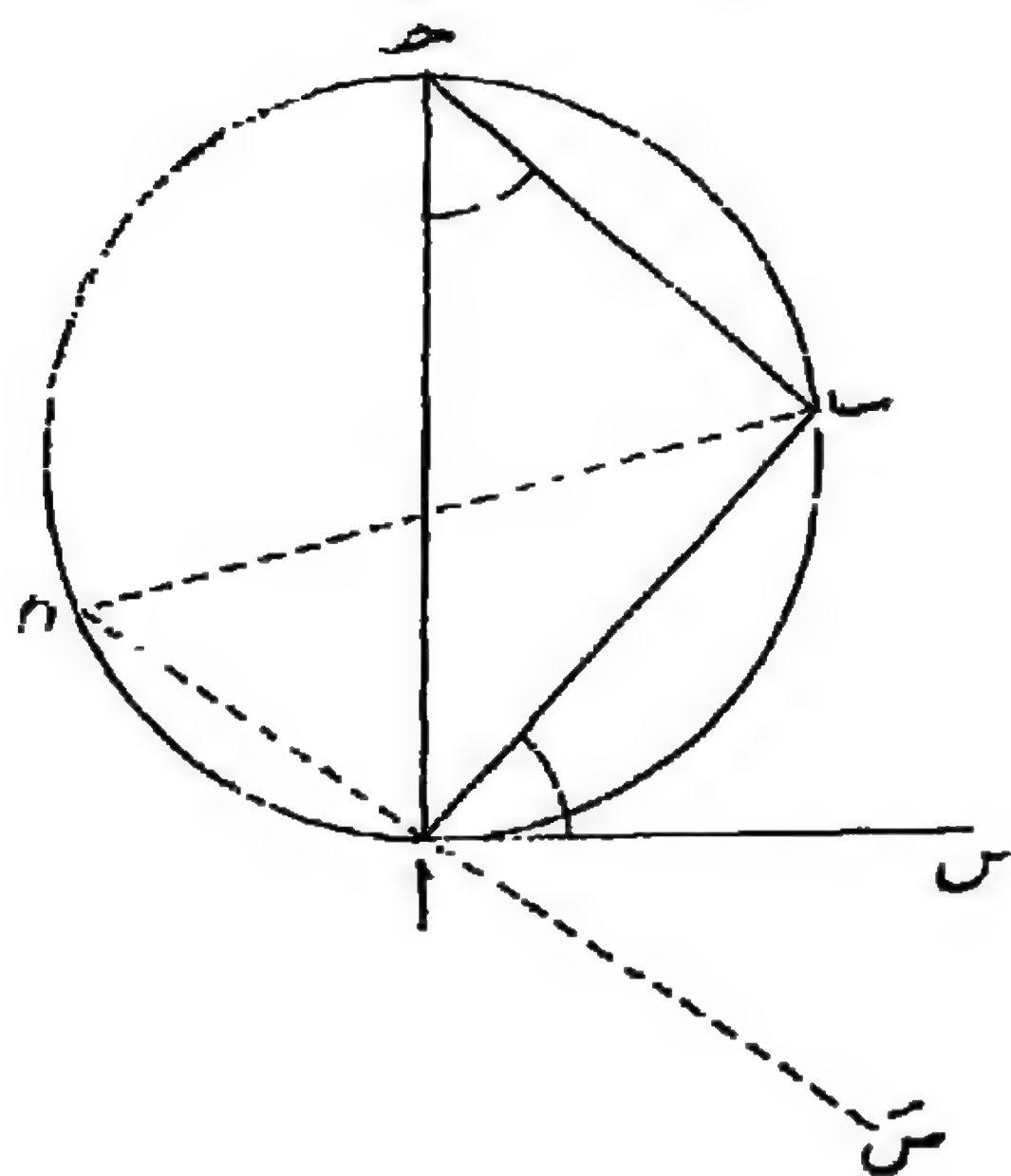
٤ ا ب وتر مشترك بين دائرتين تهما احدهما بمركز الاخرى م برهن على أن م ا ينصف الزاوية المحصورة بين هذا الوتر المشترك والمماس للدائرة الأولى ا

• دائرتان متقاطعتان في A و B فرض على إحدهما نقطة مامثل \odot ومد منها المستقيمان $\odot A$ و $\odot B$ فقطعا الدائرة الثانية في C و D برهن على أن C و D توازي مماس الدائرة الأولى في \odot

٦ إذا رسمنا مماسا لدائرة ووتر فيها مازّا بنقطة التماس فبرهن على أن العمودين النازلين من منتصف أحد القوسين على المماس والوتر متساويان

تمارين على طريقة نهاية الأوضاع

المطلوب البرهنة على نظرية ٤٩ بطريقة نهاية
الأوضاع



نفرض أن $أ ح ب$ قطعة دائرة وترها $أ ب$ $ك$ $أ س$
مستقيم ما يقطع المحيط في $ك$ $أ$ فإذا وصل $ك ب$
يحدث أن $د ب ح أ = د ب أ$ (نظرية ٣٩)
وهذه المتساوية حقيقية مهما اقتربت $ك$ من $أ$ فإذا
تحركت النقطة $ك$ حتى وقعت على $أ$ صار القاطع
 $ك أ س$ مماساً للدائرة وانطبق على المماس $أ س$
وتنطبق $د ب ك$ على $د ب أ س$

ففي نهاية الأوضاع $\Delta \text{ ب } \text{ا} \text{ س} = \Delta \text{ ب } \text{ح} \text{ ا}$ المرسومة في الجهة الأخرى من الوتر

٢ برهن من نظرية ٣١ بطريقة نهاية الأوضاع على أن العمود المقام على قطر الدائرة من نهايته مماس لمحيطها

٣ استنتج نظرية ٤٨ من هذه الخاصة : خط مركزي الدائرتين المتقاطعتين ينصف الوتر المشترك ويكون عمودا عليه

٤ استنتاج نظرية ٤٩ من تمرين ٥ صفحة ١٨١

٥ استتبع نظرية ٤٦ من نظرية ٤١

فى الدعاوى العملية

التحليل الهندسى .

الطريقة العامة التى اتبعناها الى الآن فى حل ماتقدم من الدعاوى مؤسسة على ما هو معروف بطريقة التركيب وهى ترتيب فروض الدعوى وتركيبها بحيث يمكن أن يستنبط منها ناتج يوصل الى الغرض المقصود

وهذه الطريقة وان كانت فى ذاتها منطقية لا تكشف فى كثير من الأحوال الغطاء عن السبب الذى به يمكن الوصول الى رسم الحل أو اقامة البرهان على صحة الدعوى

وهناك سير آخر يؤدى البحث فيه غالبا الى الاهتداء الى طريقة حل المسألة لاسميا اذا كانت من الدعاوى العملية

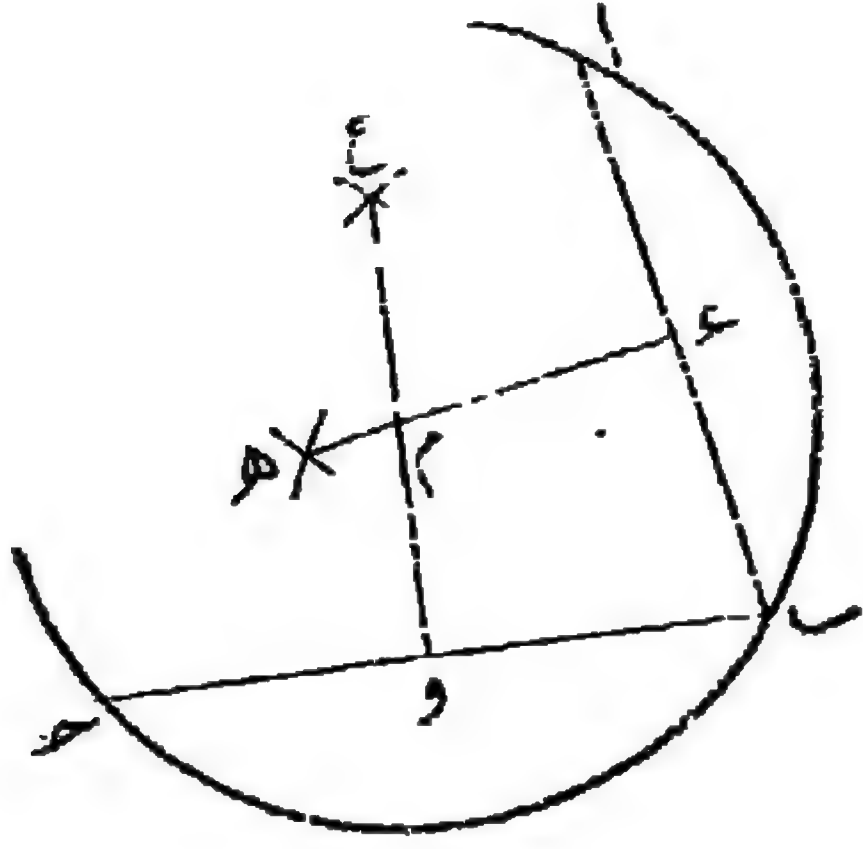
وهو مؤسس على الطريقة المعروفة بطريقة التحليل الهندسى وهى عكس طريقة التركيب المتقدمة الذكر

وذلك لأننا فى طريقة التحليل نفرض أن المسألة محلولة وانا قد حصلنا على الناتج المقصود ونبحث عن الفروض التى عساها أن تكون منتجة لهذا الناتج ثم نتبع أصل كل فرض بأن نبحث عن كيفية استنباطه مما قبله وهكذا حتى نقف فى سيرنا على فرض أصيل فى دعوى معينة وهذا فى الغالب يشير الى طريق معرفة الحل . فنبداً من الأصل الذى وقفنا عليه ونرجع فى طريقنا على عكس الترتيب الذى اتبعناه وبذلك نسير على طريقة التركيب متتبعين كل ناتج من فرض قبله وهكذا حتى نصل الى الناتج الأخير المقصود من الدعوى

وسنوضح حل بعض العمليات الآتية بطريقة التحليل (راجع عمليات ٢٣ و ٢٨ و ٢٩)

عملية ٢٠

المعلوم دائرة أو قوس منها والمطلوب إيجاد مركزها



نفرض أن AB قوس الدائرة المطلوب إيجاد مركزها
العمل — نرسم وترين مثل AB و CD ونقيم من
منتصفيهما العمودين DE و CF فيتقاطعان في M (عملية ٢)
فتكون هي المركز

البرهان — كل نقطة من نقط DE على بعدين متساويين
من A و B (عملية ١٤)

وكذلك كل نقطة من نقط CF على بعدين متساويين

من B و C

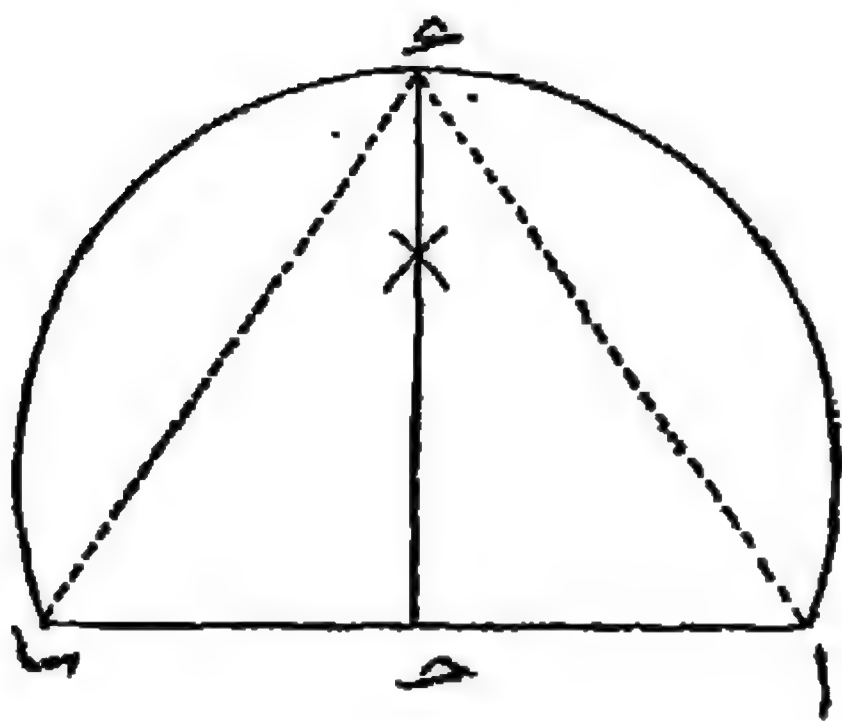
×

∴ نقطة تقاطعهما M على أبعاد متساوية من A و B و C

∴ M هي المركز (نظرية ٣٣) وهو المطلوب

عملية ٢١

المطلوب تنصيف قوس معلوم



نفرض أن القوس المراد تنصيفه AB

العمل — نصل AB ونقيم من منتصفه C العمود DE (عملية ٢)
ونمده حتى يقابل القوس في نقطة E فتكون هي منتصف القوس

البرهان — نصل AE و BE

فن حيث أن كل نقطة من نقط DE على بعدين متساويين من A و B (عملية ١٤)

∴ $AE = BE$

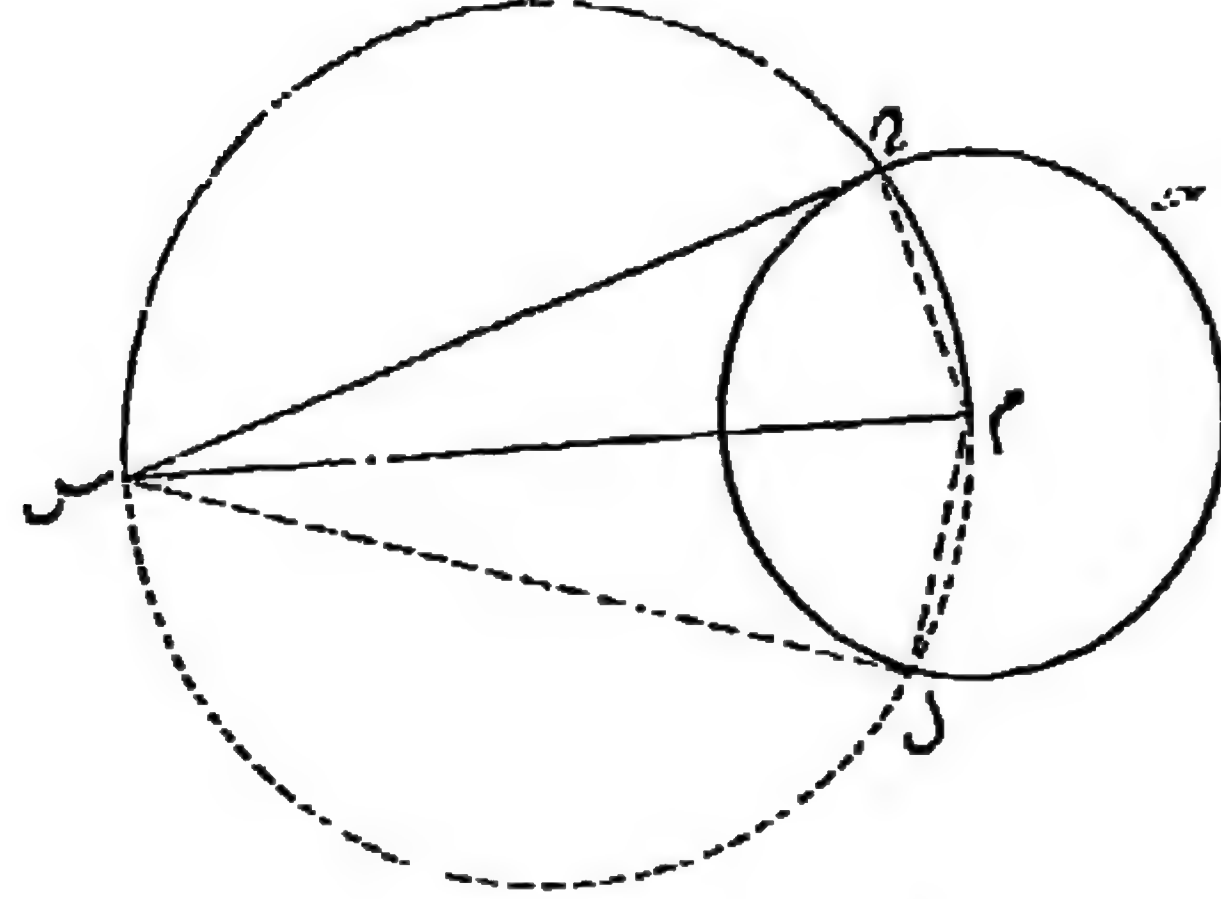
∴ $\angle ADE = \angle BDE$ (نظرية ٦)

وعليه فـ $\angle ADE = \angle BDE$ = قوس المحيطية AE = قوس المحيطية BE

أي أن القوس $AE = BE$ = القوس AB

عملية ٢٢

المطلوب رسم مماس لدائرة من نقطة خارجها



نفرض أن $L \in \odot$ الدائرة المعلومة وأن M مركزها S النقطة المفروضة خارجها
العمل — نصل S M ونرسم عليه نصف المحيط $M \odot$ S قاطعا الدائرة المعلومة في \odot
ثم نصل المستقيم $S \odot$
فيكون هو المماس المطلوب
البرهان — نصل $M \odot$

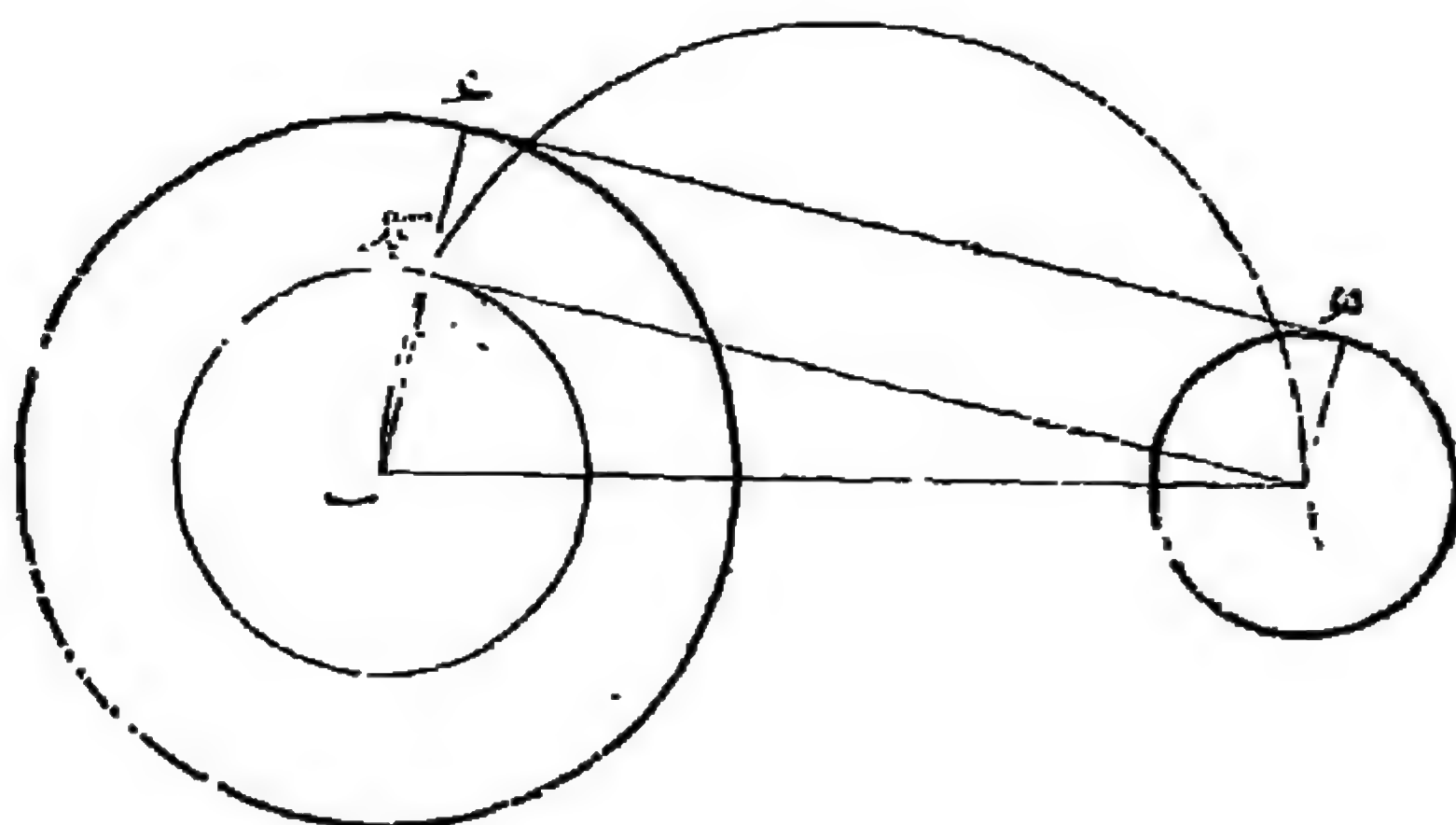
فتكون $\triangle M \odot S$ مرسومة في نصف دائرة فهي اذن قائمة
 $\therefore S \odot$ عمود على نصف القطر $M \odot$

وعليه فالمستقيم $S \odot$ يمس الدائرة المعلومة في \odot (نظرية ٤٦)

ومن حيث انه يمكن رسم نصف محيط دائرة آخر على القطر $M S$ يقطع محيط الدائرة المعلومة
في نقطة أخرى مثل L يمكن أيضا رسم مماس آخر $S L$ للدائرة المعلومة من النقطة المفروضة S

تنبيه — اذا فرضنا أن النقطة S تقترب من الدائرة فان $\triangle S L$ تزداد شيئا فشيئا
حتى اذا ما وقعت S على المحيط تصير الزاوية مستقيمة وينطبق المماسان كل على الآخر فاذا دخلت
 S في الدائرة استحال يمد مماس منها (راجع الملاحظة في صفحة ٩٨)

المطلوب رسم مماس مشترك لدائرتين معلومتين



واذا رسمنا α موازيا h s كان الشكل α مستطيلا وكان $s = \alpha = h = \alpha$

العمل - نركز في ب و بنصف قطريساوى الفرق بين نصفى قطرى الدائرتين المعلومتين نرسم دائرة
ثم نعد من ا مماسا لها وليكن ا ح

ونصل ب ح ونمده على امتقامته ليقابل الدائرة ب في د ثم نرسم من ا نصف القطر ا ه موازيا
ب د وفي اتجاهه

ونصل هـ و

فيكون هـ هـ هو المماس المشترك المطلوب

ملاحظة - من حيث انه يمكن مد مماسين مثل a من نقطة a الى محيط الدائرة التي رسمناها للتوصل بها الى الحل فبالطريقة المتقدمة يمكن رسم مماسين مشتركين للدائرتين المعلومتين ويقال لهما مماسان للدائرتين من الخارج

التحليل ١ إذا فرضنا في هذه الحالة أن هـ د يمس الدائرتين في هـ و ك بحيث يقع ا هـ في جهة
من ا ب و ك ب د في الجهة الأخرى
حدث أن المستقيم ا ح الموازي للماس هـ د يقابل امتداد ب د في ح
وأن $b = c + d$ و $c = d + e$
ولكون د ا ح ب قائمة كما تقدم

العمل - نركز في ب وننصف قطريساوى مجموع نصفى القطرى الدائرتين المعلومتين نرسم دائرة ثم نمد ا ح مماسا لها ونجربى ما أبجربناه فى الحالة المتقدمة إلا أننا نرسم ا ه فى اتجاه مضاد لاتجاه المستقيم ب د

ملاحظة - من حيث انه يمكن مد مماسين من النقطة ١ الى الدائرة التي رسمناها للتوصل بها الى الحل كما في الحالة المتقدمة فانه يمكن كذلك رسم مماسين مشتركين للدائرتين المعلومتين ويقال لهما مماسان من الداخل

[هذا وترك للطلاب ترتيب حل هذه المسألة على طريقة التركيب]

تمارين على المماسات المشتركة

(مسائل عددية وتخطيطية)

١ كم مماسا مشتركا يمكن أن ترسم في كل من الأحوال الآتية

(أولا) اذا تقاطع محيطا دائرتين

(ثانيا) اذا تماسا من الخارج

(ثالثا) اذا تماسا من الداخل

وضح الاجابة برسم دائرتين نصف قطرها ٣,٥ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٢,٥ من السنتيمترات بحيث يكون البعد بين المركزين يساوى

(أولا) ٢,٥ من السنتيمترات

(ثانيا) ٦ سنتيمترات

(ثالثا) ١ سنتيمترا

(رابعا) ٧,٥ من السنتيمترات

ثم ارسم المماسات المشتركة في كل حالة وبين في أى الحالات لا يمكن اتباع الطريقة العامة في رسم هذه المماسات أو إمكان اتباعها مع التعديل

٢ ارسم دائرتين نصف قطر إحداهما ٤ سنتيمترات ونصف قطر الأخرى ١,٦ من السنتيمترات بحيث يكون البعد بين مركزيهما ٤ سنتيمترات وارسم المماسات المشتركة واستخرج أطوالها ثم قسمها
٣ ارسم جميع المماسات المشتركة لدائرتين مركزيهما متباعدان بقدر ٤ من السنتيمترات ونصف قطر إحداهما ١,٥ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٣ سنتيمترات واستخرج طول كل من المماسين الخارجين بالحساب والقياس

٤ دائرتان نصف قطر إحداهما ٣,٤ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى سنتيمتران والبعد بين مركزيهما ٤,٢ من السنتيمترات والمطلوب (أولا) رسم المماسات المشتركة (ثانيا) إيجاد أطوالها (ثالثا) إيجاد طول الوتر المشترك (رابعا) مـدّ الوتر المشترك على استقامته وبيان أنه ينصف هذه المماسات بالقياس

٥ دائرتان نصف قطر إحداهما ٣,٢ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ١,٦ من السنتيمترات والبعد بين مركزيهما ٦ سنتيمترات والمطلوب رسم جميع المماسات المشتركة لهما

٦ المطلوب رسم المماسين المشتركين الخارجين لدائرتين متساويتين

(مسائل نظرية)

٧ إذا رسمنا مماسين مشتركين لدائرتين فإن جزأيهما المحصورين بين نقطتي التماس متساويان سواء كان المماسان خارجين أو داخليين

٨ إذا رسمنا مماسين خارجين ومماسين داخليين لدائرتين متباعدتين في الخارج فإن المماسين الداخليين يتقاطعان في نقطة على خط المركزين وكذلك المماسان الخارجيان إذا امتدّا

٩ دائرتان متمستان من الخارج في نقطة ١ رسم مماس مشترك يمسهما في نقطتي ٢ و ٣ برهن على أن المستقيم ٢ و ٣ يقابل زاوية قائمة رأسها في ١

في رسم الدوائر

لا يمكن رسم الدائرة يجب تعيين
(أولاً) مركزها

(ثانياً) طول نصف قطرها

ولتعيين المركز يجب أن يتوفر شرطان يتعين بكل منهما محل هندسي يكون مركز الدائرة إحدى نقطه
فنقطة تقاطع هذين المحلين تعين وضع المركز (كما تبين ذلك في صفحة ٩٨)

ولتعيين طول نصف القطر يجب أن تعين أي نقطة أخرى من نقط محيط الدائرة بعد تعيين المركز
وعلى ذلك يمكن رسم الدائرة متى علمت ثلاثة فروض مطلقة

فمثلاً يمكن رسم الدائرة متى علم

(أولاً) ثلاث نقط من نقط المحيط

(ثانياً) أوضاع ثلاثة مماسات

(ثالثاً) نقطة من نقط المحيط ومماس ونقطة التماس التي عليه

وقد يمكن رسم أكثر من دائرة تستوفي الشروط الثلاثة المفروضة

وعلى الطالب قبل حل التمارين الآتية أن يتنبه إلى معرفة المحال الهندسية الآتية بيانها

(أولاً) المحل الهندسي لمراكز الدوائر المارة بنقطتين معلومتين

(ثانياً) المحل الهندسي لمراكز الدوائر التي تمس مستقيماً معلوماً في نقطة مفروضة عليه

(ثالثاً) المحل الهندسي لمراكز الدوائر التي تمس دائرة معلومة في نقطة مفروضة عليها

(رابعاً) المحل الهندسي لمراكز الدوائر المعلوم نصف قطرها والتي تمس مستقيماً معلوماً

(خامساً) المحل الهندسي لمراكز الدوائر المعلوم نصف قطرها والتي تمس دائرة معلومة

(سادساً) المحل الهندسي لمراكز الدوائر التي تمس مستقيمين معلومين

تمارين

- ١ ارسم دائرة تمر بثلاث نقط معلومة
- ٢ اذا رسمت دائرة تمس مستقيما معلوما وليكن L في B فعلى أى مستقيم يكون مركزها
واذا مررت دائرة بالنقطتين المعلومتين A و B فعلى أى مستقيم يكون مركزها
- اذا علم هذا فانه يطلب رسم دائرة تمس مستقيما معلوما مثل L في نقطة B وتمر بنقطة أخرى مثل A
- ٣ اذا رسمت دائرة تمس دائرة معلومة مركزها M في نقطة A فعلى أى خط يكون مركز هذه الدائرة
ارسم دائرة تمس الدائرة المعلومة M في A وتمر بنقطة أخرى B
- ٤ النقطة D تبعد عن المستقيم AB بقدر $5,4$ من السنتيمترات والمطلوب رسم دائرتين نصف
قطر كل منهما $3,2$ من السنتيمترات تمران بالنقطة D وتماسان المستقيم AB
- ٥ دائرتان نصف قطر إحداهما 3 سنتيمترات ونصف قطر الأخرى سنتيمتران والبعد بين
مركزيهما 6 سنتيمترات والمطلوب رسم دائرة نصف قطرها $3,5$ من السنتيمترات تمس كلا من الدائرتين
المعلومتين من الخارج
- كم حلا لهذه المسئلة وما طول نصف قطر أصغر دائرة تمس الدائرتين المعلومتين من الخارج
- ٦ اذا مس محيط دائرة المستقيمين M و A و B فعلى أى مستقيم يكون مركزها
ارسم M و A و B بحيث يحصران بينهما زاوية مقدارها 76° وارسم دائرة نصف قطرها $3,2$
من السنتيمترات تمس كلا من هذين المستقيمين
- ٧ دائرة نصف قطرها $3,5$ من السنتيمترات وبعد مركزها عن المستقيم المعلوم AB يساوى 5
سنتيمترات والمطلوب رسم دائرتين نصف قطر كل منهما $2,5$ من السنتيمترات بحيث تماسان الدائرة
المعلومة والمستقيم AB
- ٨ كيف ترسم دائرة تمس كلا من مستقيمين متوازيين وقاطع لهما
برهن على أنه يمكن رسم دائرتين متساويتين من هذا القبيل
- ٩ ارسم دائرة تمس دائرة أخرى معلومة ومستقيما معلوما في نقطة مفروضة عليه
- ١٠ ارسم دائرة تمس مستقيما معلوما ودائرة أخرى معلومة في نقطة مفروضة على محيطها
- ١١ كيف ترسم دائرة تمس كلا من ثلاثة مستقيبات معلومة لا يتوازي منها اثنتان . كم دائرة
يمكن رسمها من هذا القبيل

تمارين

١ المطلوب رسم مثلث على قاعدة معلومة رأسه على مستقيم معلوم وزاوية رأسه تساوى زاوية معلومة

٢ المطلوب رسم المثلث اذا علمت منه القاعدة وزاوية الرأس وأحد الفروض الآتية
(أولاً) ضلع غير القاعدة

(ثانياً) الارتفاع

(ثالثاً) طول المستقيم المتوسط المنصف للقاعدة

(رابعاً) موقع العمود النازل من الرأس على القاعدة

٣ المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الرأس ونقطة تقابل منتصف زاوية الرأس بهذه القاعدة

[نفرض أن AB القاعدة K س النقطة المفروضة عليها K د الزاوية المعلومة فنرسم على AB قطعة دائرة تقبل D ثم نكمل الدائرة برسم القوس AB وتنصفه في K ثم نصل K س ونمده على استقامته حتى يقابل المحيط في C فيكون ABC هو المثلث المطلوب]

٤ المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الرأس ومجموع الضلعين الآخرين

[نفرض أن AB القاعدة K د الزاوية المعلومة P مستقيم مساو لمجموع الضلعين ونرسم على AB قطعتي دائرتين إحداهما تقبل زاوية D والثانية تقبل زاوية $=$ نصف D ثم نركز في A وبنصف قطريساوى P نرسم دائرة تقطع قوس القطعة الثانية في S K ص ثم نصل AS (أو AV) فيقطع قوس القطعة الأولى في C ويكون ABC هو المثلث المطلوب]

٥ المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الرأس والفرق بين الضلعين الآخرين

الدائرة والأشكال المستقيمة الأضلاع

تعريف

١ كثير الأضلاع شكل مستقيم الأضلاع محدود بأكثر من أربعة مستقيمت
ويسمى خمسا

إذا كانت أضلاعه خمسة

» مستسا » » » ستة

» مسبعا » » » سبعة

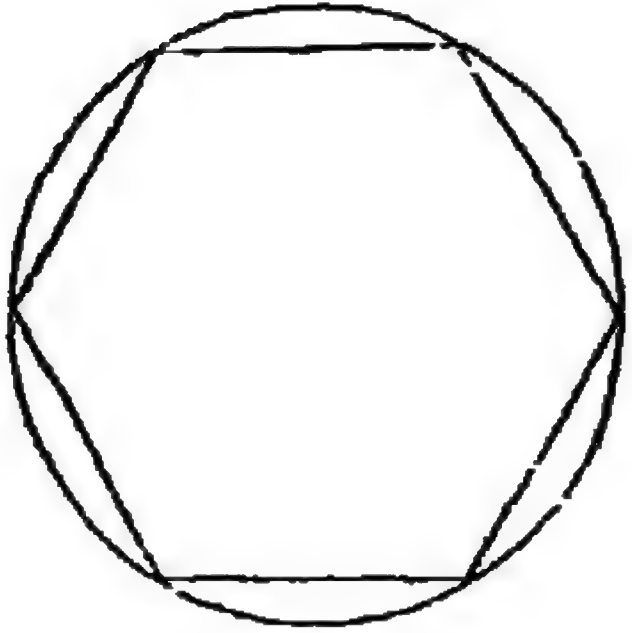
» ثمنا » » » ثمانية

» معشرا » » » عشرة

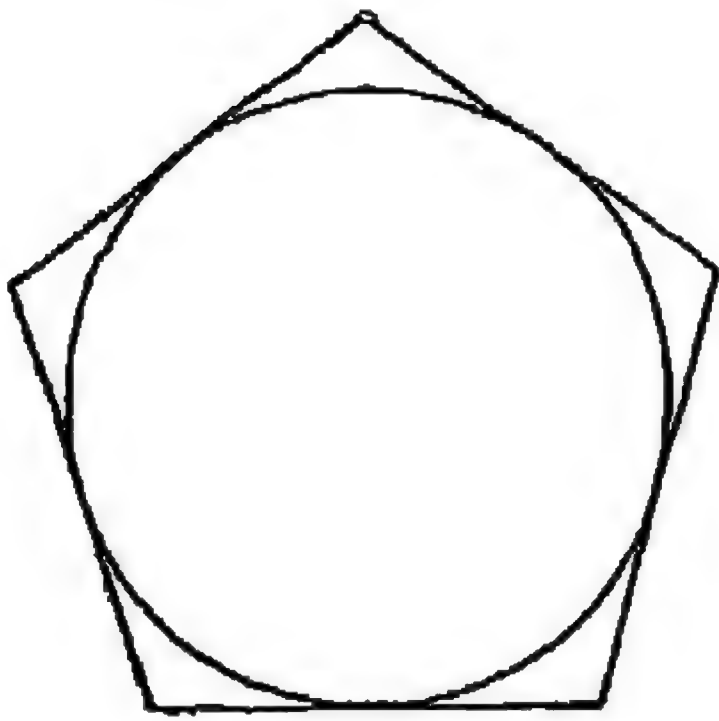
» ذا الاثنى عشر ضلعا » » » اثنا عشر

» ذا الخمسة عشر ضلعا » » » خمسة عشر وهكذا

٢ كثير الأضلاع أو المضلع المنتظم ما كانت أضلاعه متساوية
وزواياه كذلك



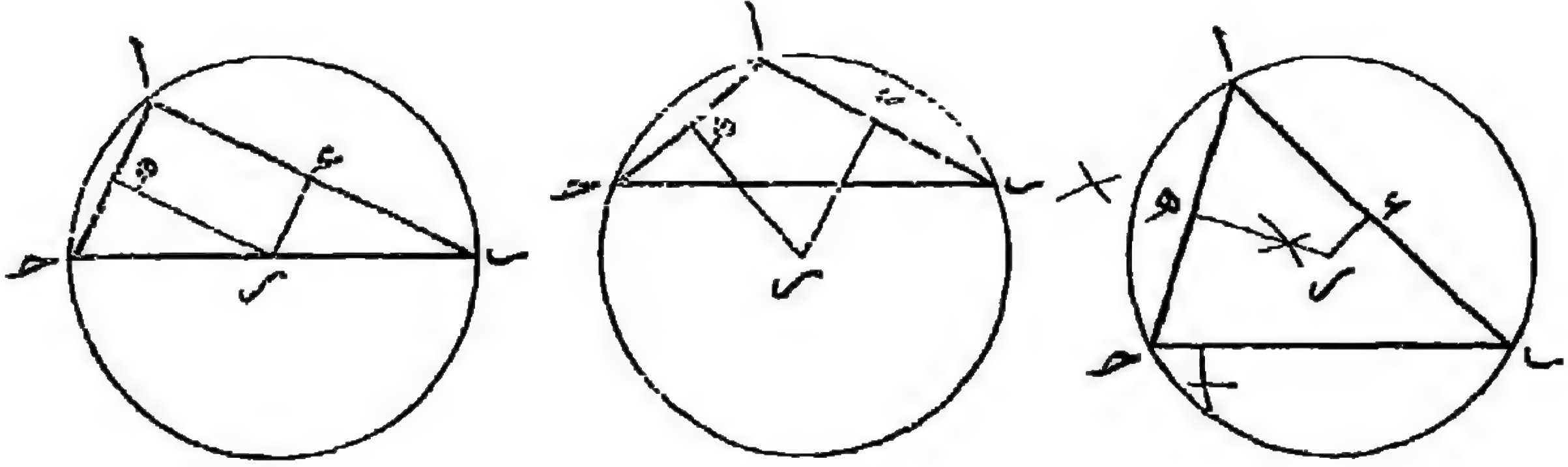
٣ يقال ان الشكل المستقيم الأضلاع مرسوم داخل دائرة متى
كانت جميع رؤوسه على محيطها ويقال ان الدائرة مرسومة خارج أى
شكل مستقيم الأضلاع أو عليه متى مرّ محيطها برؤوسه



٤ يقال ان الدائرة مرسومة داخل الشكل المستقيم الأضلاع متى
كان كل ضلع من أضلاعه يمس محيطها وفي هذه الحالة يقال ان
هذا الشكل مرسوم خارج الدائرة

عملية ٢٥

المطلوب رسم دائرة خارج مثلث معلوم

نفرض أن A, B, C المثلث المطلوب رسم دائرة خارجه

العمل — تقيم على AB من منتصفه العمود D وعلى AC من منتصفه العمود E فيتقابلان في F

فتكون F هي المركز

البرهان — من حيث ان كل نقطة من تقاطع D, E على بعدين متساويين من A و B (عملية ١٤) وكذلك كل نقطة من تقاطع D, E على بعدين متساويين من A و C \therefore على أبعاد متساوية من A و B و C

فاذا ركز في F ورسم محيط دائرة بنصف قطر يساوي FA فانه يمر بالنقطتين B و C ويكون هو المحيط المطلوب

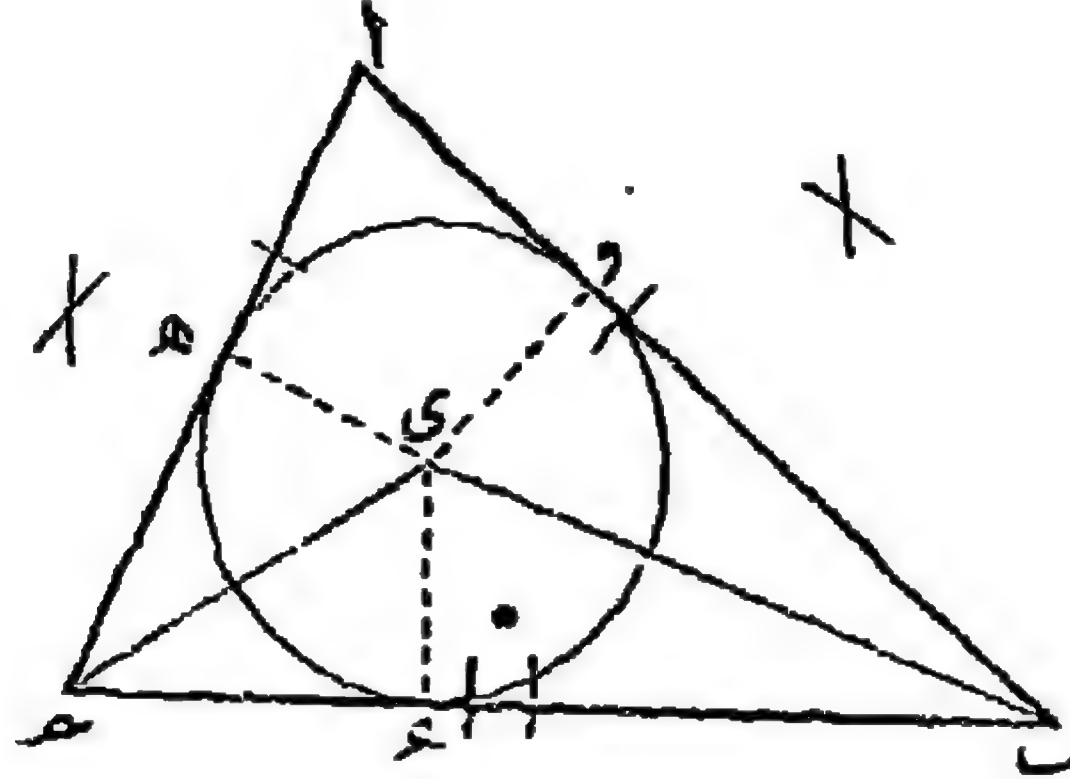
ملاحظة — نرى أنه اذا كان المثلث حاد الزوايا فان مركز الدائرة يقع داخله واذا كان قائم الزاوية يقع المركز على وتر المثلث واذا كان منفرج الزاوية يقع المركز خارجا عنه

تنبيه — يؤخذ مما تقدم في (صفحة ٩٨) أنه اذا وصلنا النقطة F بمنتصف BC كان المستقيم الواصل عمودا على BC

وعليه فالأعمدة الثلاثة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها لتتلاقى جميعا في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث

عملية ٢٦

المطلوب رسم دائرة داخل مثلث معلوم



نفرض أن ΔABC المثلث المراد رسم الدائرة داخله

العمل - ننصف كلا من ΔABC بالمتقيمين BY و CY المتقاطعين في Y (عملية ١)

فتكون Y مركز الدائرة

البرهان - ننزل من Y الأعمدة YD و YE و YF على أضلاع المثلث فكل نقطة من نقط Y على بعدين متساويين عن ΔABC (عملية ١٥)

$$\therefore YD = YE \text{ و}$$

وكذلك كل نقطة من نقط Y على بعدين متساويين عن ΔABC

$$\therefore YD = YE \text{ و}$$

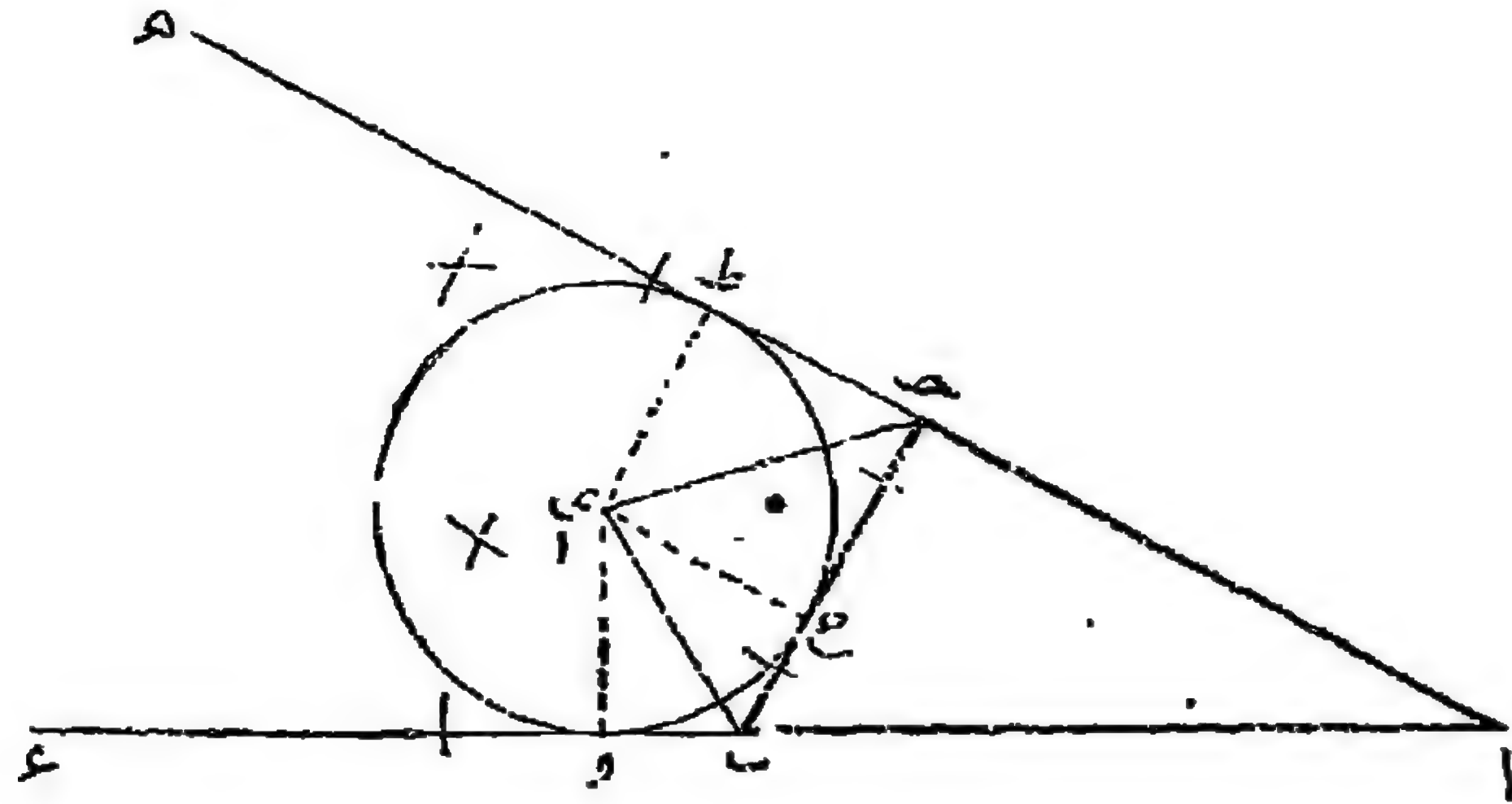
$$\therefore YD = YE = YF \text{ و}$$

فاذا ركنا في Y وبنصف قطريساوي أحدها YD رسمنا دائرة فان محيطها يمر بالنقطتين الأخريين H و F ويمس الأضلاع AB و BC و AC لأن الزوايا في D و H و F قوائم أي أن الدائرة D و H و F مرسومة داخل المثلث

تنبيه - يؤخذ مما تقدم (في ٢ صفحة ١٠١) أنه اذا وصلنا Y كان منصفزاوية B و A وعلى ذلك فنصفات زوايا المثلث تتلاقى جميعا في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المرسومة داخله
تعريف - الدائرة التي تمس المثلث من الخارج هي مامس محيطها أحد أضلاع المثلث وامتداد الضلعين الآخرين

عملية ٢٧

المطلوب رسم دائرة تمس المثلث من الخارج



إذا فرضنا أن AB \angle المثلث ومددنا الضلع AB إلى D والضلع AC إلى H
فانه يطلب رسم الدائرة التي تمس BC \angle وامتداد الضلعين AB و AC

العمل — ن نصف الزاويتين B و C و K \angle BC \angle بالمستقيمين B و C \angle K \angle فيتقاطعان في I
فتكون I مركز الدائرة المطلوبة

البرهان — نزل من I الأعمدة ID و IE و IF على AD و BC و CH \angle
ومن حيث أن كل نقطة من نقط B و C على بعدين متساويين من B و C \angle (عملية ١٥)

$$\therefore ID = IE$$

$$\text{وكذلك } IE = IF$$

$$\therefore ID = IE = IF$$

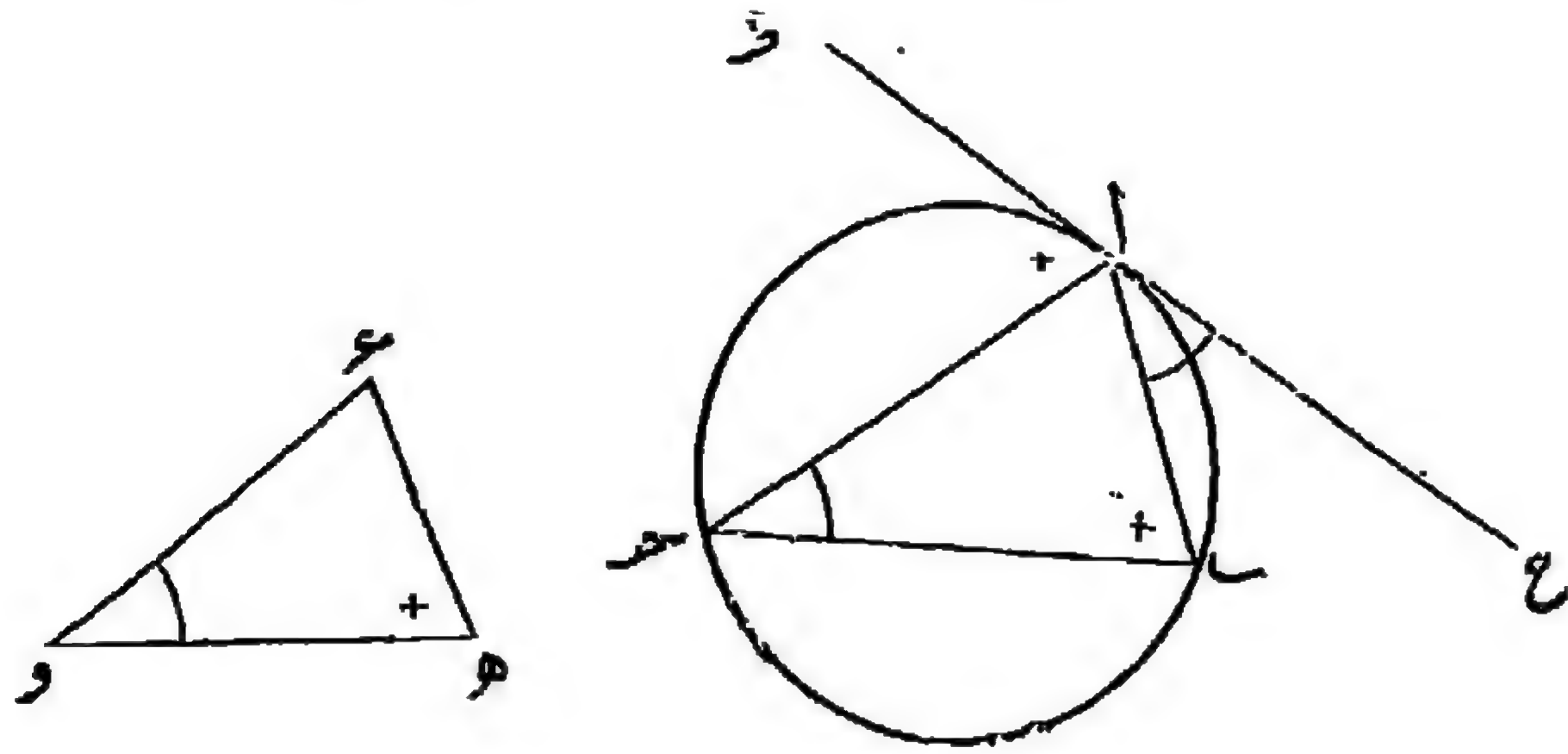
فاذا ركزنا في I وبنصف قطر يساوي ID و رسمنا محيط دائرة فانه يمر بالنقطتين D و H ويس
 AD و BC و CH لأن الزوايا في D و H و C \angle قوائم

$\therefore D$ و H هي الدائرة التي تمس المثلث من الخارج

تنبيه ١ — يؤخذ مما تقدم أنه يمكن رسم ثلاث دوائر كل منها تمس المثلث من الخارج
تنبيه ٢ — يؤخذ مما تقدم (في صفحة ١٠١) أنه اذا وصلنا A \angle كان منصف الزاوية BAC وعلى ذلك
فنصف الزاويتين الخارجيتين للمثلث ومنصف الثالثة الداخلة لتتلاقى جميعا في نقطة واحدة هي مركز
الدائرة التي تمس أضلاع المثلث من الخارج

عملية ٢٨

المطلوب رسم مثلث داخل دائرة معلومة زواياه تساوى زوايا مثلث آخر معلوم



نفرض أن $أ ب ح$ الدائرة المعلومة $ك د هـ$ و المثلث المعلوم التحليل — نفرض أن المسألة محلولة. وأن $أ ب ح$ المثلث المطلوب فإذا أمكن من نقطة ما على المحيط مثل $ا$ رسم الوترين $أ ب$ و $ا ح$ بحيث إذا وصل $ب ح$ تكون

$$\angle د = \angle هـ \text{ و } \angle د = \angle و$$

حدث أن $\angle د ب ا = \angle ا ح د$ (نظرية ١٦)

وبالتأمل نرى أن $د ب$ المرسومة في القطعة $أ ب ح$ تبين مساويتها المحصورة بين الوتر $ا ح$ ومماس الدائرة في نقطة $ا$ (نظرية ٤٩)

فإذا رسمنا اذن من $ا$ المماس $ع ا ط$ حدث أن $\angle د ط ا = \angle د هـ$

$$\text{وكذلك } \angle د ع ا = \angle د و$$

فإذا اتبعنا عكس هذا السير نصل الى العمل الآتى

العمل — نفرض نقطة ما مثل $ا$ على المحيط $أ ب ح$ ونرسم المماس $ع ا ط$ (عملية ٢٢)

ونمد من نقطة $ا$ الوتر $ا ح$ بحيث يصنع مع المماس $ا ط$ الزاوية $ط ا ح$ تساوى $\angle د هـ$

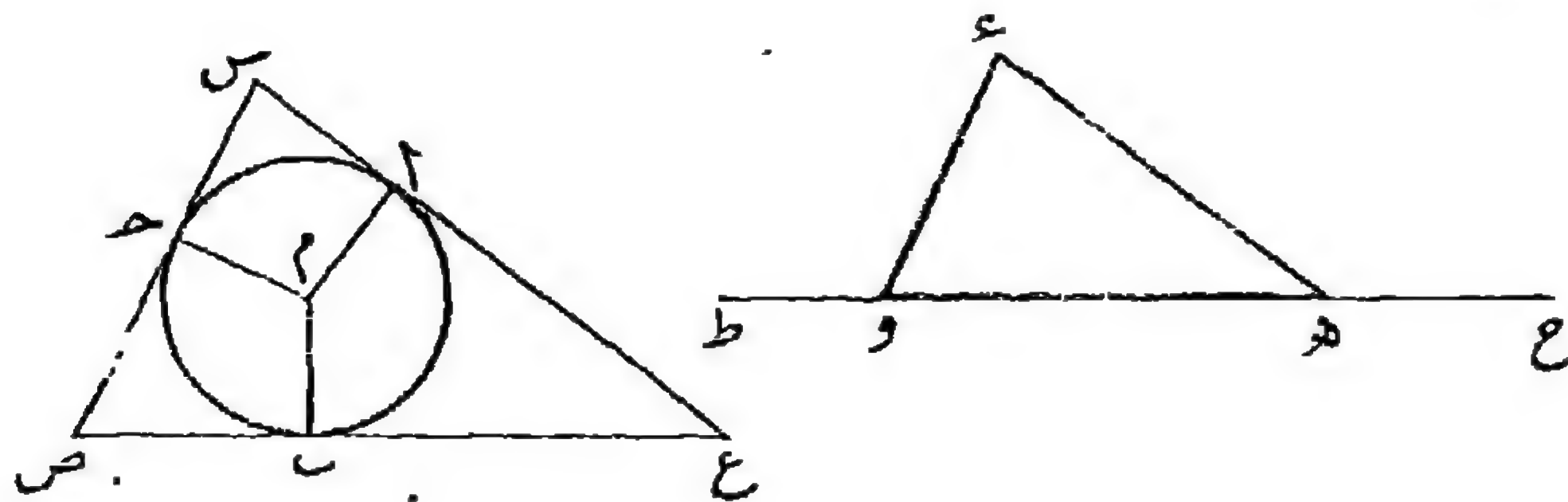
ونمد من نقطة $ا$ الوتر $أ ب$ بحيث يصنع مع $ا ع$ الزاوية $ع ا ب$ تساوى $\angle د و$

ثم نصل $ب ح$

فيكون $أ ب ح$ المثلث المطلوب

تنبيه — يجدر بالتلميذ أن يرسم شكل هذه الدعوى والتي بعدها مكبرا ويبين فيه الخطوط اللازمة لرسم المماس $ع ا ط$ وكذلك الخطوط اللازمة لرسم الزاويتين $ط ا ح$ و $ع ا ب$

المطلوب رسم مثلث خارج دائرة معلومة زواياها تساوى زوايا مثلث آخر معلوم



وحینئذ ینتج أن $\Delta S = \Delta S$

ومن حيث انه في الشكل الرابع ب م ا ع

$$h \Delta - i \lambda_0 = e \Delta - i \lambda_0 = u \Delta \quad \therefore$$

وكذلك $\angle م ح د - ١٨٠^\circ = \angle د ص ح - ١٨٠^\circ$

ومن ذلك نستنتج الطريقة الآتية لحل العملية

العمل — نمذ هـ و على استقامته في كل من جهتيه الى ع-6 ط ثم نعين مركز الدائرة ا ب ح وليكن م
ثم نرسم نصف قطر ما مثل م ب

ونرسم من م نصف القطر م ا بحيث تكون د ب م ا = د س ه ح

شم نوسم د ب م ح = د و ط

وتقسم على أنصاف الأقطار أعمدة من النقط ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧ ٢٨ ٢٩ ٣٠ ٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٨ ٣٩ ٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩ ٥٠ ٥١ ٥٢ ٥٣ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٧ ٥٨ ٥٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٧ ٦٨ ٦٩ ٧٠ ٧١ ٧٢ ٧٣ ٧٤ ٧٥ ٧٦ ٧٧ ٧٨ ٧٩ ٨٠ ٨١ ٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢ ٩٣ ٩٤ ٩٥ ٩٦ ٩٧ ٩٨ ٩٩ ١٠٠ ١٠١ ١٠٢ ١٠٣ ١٠٤ ١٠٥ ١٠٦ ١٠٧ ١٠٨ ١٠٩ ١١٠ ١١١ ١١٢ ١١٣ ١١٤ ١١٥ ١١٦ ١١٧ ١١٨ ١١٩ ١٢٠ ١٢١ ١٢٢ ١٢٣ ١٢٤ ١٢٥ ١٢٦ ١٢٧ ١٢٨ ١٢٩ ١٣٠ ١٣١ ١٣٢ ١٣٣ ١٣٤ ١٣٥ ١٣٦ ١٣٧ ١٣٨ ١٣٩ ١٤٠ ١٤١ ١٤٢ ١٤٣ ١٤٤ ١٤٥ ١٤٦ ١٤٧ ١٤٨ ١٤٩ ١٥٠ ١٥١ ١٥٢ ١٥٣ ١٥٤ ١٥٥ ١٥٦ ١٥٧ ١٥٨ ١٥٩ ١٦٠ ١٦١ ١٦٢ ١٦٣ ١٦٤ ١٦٥ ١٦٦ ١٦٧ ١٦٨ ١٦٩ ١٧٠ ١٧١ ١٧٢ ١٧٣ ١٧٤ ١٧٥ ١٧٦ ١٧٧ ١٧٨ ١٧٩ ١٨٠ ١٨١ ١٨٢ ١٨٣ ١٨٤ ١٨٥ ١٨٦ ١٨٧ ١٨٨ ١٨٩ ١٩٠ ١٩١ ١٩٢ ١٩٣ ١٩٤ ١٩٥ ١٩٦ ١٩٧ ١٩٨ ١٩٩ ٢٠٠ ٢٠١ ٢٠٢ ٢٠٣ ٢٠٤ ٢٠٥ ٢٠٦ ٢٠٧ ٢٠٨ ٢٠٩ ٢١٠ ٢١١ ٢١٢ ٢١٣ ٢١٤ ٢١٥ ٢١٦ ٢١٧ ٢١٨ ٢١٩ ٢٢٠ ٢٢١ ٢٢٢ ٢٢٣ ٢٢٤ ٢٢٥ ٢٢٦ ٢٢٧ ٢٢٨ ٢٢٩ ٢٣٠ ٢٣١ ٢٣٢ ٢٣٣ ٢٣٤ ٢٣٥ ٢٣٦ ٢٣٧ ٢٣٨ ٢٣٩ ٢٤٠ ٢٤١ ٢٤٢ ٢٤٣ ٢٤٤ ٢٤٥ ٢٤٦ ٢٤٧ ٢٤٨ ٢٤٩ ٢٥٠ ٢٥١ ٢٥٢ ٢٥٣ ٢٥٤ ٢٥٥ ٢٥٦ ٢٥٧ ٢٥٨ ٢٥٩ ٢٦٠ ٢٦١ ٢٦٢ ٢٦٣ ٢٦٤ ٢٦٥ ٢٦٦ ٢٦٧ ٢٦٨ ٢٦٩ ٢٧٠ ٢٧١ ٢٧٢ ٢٧٣ ٢٧٤ ٢٧٥ ٢٧٦ ٢٧٧ ٢٧٨ ٢٧٩ ٢٨٠ ٢٨١ ٢٨٢ ٢٨٣ ٢٨٤ ٢٨٥ ٢٨٦ ٢٨٧ ٢٨٨ ٢٨٩ ٢٩٠ ٢٩١ ٢٩٢ ٢٩٣ ٢٩٤ ٢٩٥ ٢٩٦ ٢٩٧ ٢٩٨ ٢٩٩ ٣٠٠ ٣٠١ ٣٠٢ ٣٠٣ ٣٠٤ ٣٠٥ ٣٠٦ ٣٠٧ ٣٠٨ ٣٠٩ ٣١٠ ٣١١ ٣١٢ ٣١٣ ٣١٤ ٣١٥ ٣١٦ ٣١٧ ٣١٨ ٣١٩ ٣٢٠ ٣٢١ ٣٢٢ ٣٢٣ ٣٢٤ ٣٢٥ ٣٢٦ ٣٢٧ ٣٢٨ ٣٢٩ ٣٣٠ ٣٣١ ٣٣٢ ٣٣٣ ٣٣٤ ٣٣٥ ٣٣٦ ٣٣٧ ٣٣٨ ٣٣٩ ٣٤٠ ٣٤١ ٣٤٢ ٣٤٣ ٣٤٤ ٣٤٥ ٣٤٦ ٣٤٧ ٣٤٨ ٣٤٩ ٣٥٠ ٣٥١ ٣٥٢ ٣٥٣ ٣٥٤ ٣٥٥ ٣٥٦ ٣٥٧ ٣٥٨ ٣٥٩ ٣٦٠ ٣٦١ ٣٦٢ ٣٦٣ ٣٦٤ ٣٦٥ ٣٦٦ ٣٦٧ ٣٦٨ ٣٦٩ ٣٧٠ ٣٧١ ٣٧٢ ٣٧٣ ٣٧٤ ٣٧٥ ٣٧٦ ٣٧٧ ٣٧٨ ٣٧٩ ٣٨٠ ٣٨١ ٣٨٢ ٣٨٣ ٣٨٤ ٣٨٥ ٣٨٦ ٣٨٧ ٣٨٨ ٣٨٩ ٣٩٠ ٣٩١ ٣٩٢ ٣٩٣ ٣٩٤ ٣٩٥ ٣٩٦ ٣٩٧ ٣٩٨ ٣٩٩ ٤٠٠ ٤٠١ ٤٠٢ ٤٠٣ ٤٠٤ ٤٠٥ ٤٠٦ ٤٠٧ ٤٠٨ ٤٠٩ ٤١٠ ٤١١ ٤١٢ ٤١٣ ٤١٤ ٤١٥ ٤١٦ ٤١٧ ٤١٨ ٤١٩ ٤٢٠ ٤٢١ ٤٢٢ ٤٢٣ ٤٢٤ ٤٢٥ ٤٢٦ ٤٢٧ ٤٢٨ ٤٢٩ ٤٣٠ ٤٣١ ٤٣٢ ٤٣٣ ٤٣٤ ٤٣٥ ٤٣٦ ٤٣٧ ٤٣٨ ٤٣٩ ٤٤٠ ٤٤١ ٤٤٢ ٤٤٣ ٤٤٤ ٤٤٥ ٤٤٦ ٤٤٧ ٤٤٨ ٤٤٩ ٤٥٠ ٤٥١ ٤٥٢ ٤٥٣ ٤٥٤ ٤٥٥ ٤٥٦ ٤٥٧ ٤٥٨ ٤٥٩ ٤٦٠ ٤٦١ ٤٦٢ ٤٦٣ ٤٦٤ ٤٦٥ ٤٦٦ ٤٦٧ ٤٦٨ ٤٦٩ ٤٧٠ ٤٧١ ٤٧٢ ٤٧٣ ٤٧٤ ٤٧٥ ٤٧٦ ٤٧٧ ٤٧٨ ٤٧٩ ٤٨٠ ٤٨١ ٤٨٢ ٤٨٣ ٤٨٤ ٤٨٥ ٤٨٦ ٤٨٧ ٤٨٨ ٤٨٩ ٤٩٠ ٤٩١ ٤٩٢ ٤٩٣ ٤٩٤ ٤٩٥ ٤٩٦ ٤٩٧ ٤٩٨ ٤٩٩ ٥٠٠ ٥٠١ ٥٠٢ ٥٠٣ ٥٠٤ ٥٠٥ ٥٠٦ ٥٠٧ ٥٠٨ ٥٠٩ ٥١٠ ٥١١ ٥١٢ ٥١٣ ٥١٤ ٥١٥ ٥١٦ ٥١٧ ٥١٨ ٥١٩ ٥٢٠ ٥٢١ ٥٢٢ ٥٢٣ ٥٢٤ ٥٢٥ ٥٢٦ ٥٢٧ ٥٢٨ ٥٢٩ ٥٣٠ ٥٣١ ٥٣٢ ٥٣٣ ٥٣٤ ٥٣٥ ٥٣٦ ٥٣٧ ٥٣٨ ٥٣٩ ٥٤٠ ٥٤١ ٥٤٢ ٥٤٣ ٥٤٤ ٥٤٥ ٥٤٦ ٥٤٧ ٥٤٨ ٥٤٩ ٥٥٠ ٥٥١ ٥٥٢ ٥٥٣ ٥٥٤ ٥٥٥ ٥٥٦ ٥٥٧ ٥٥٨ ٥٥٩ ٥٦٠ ٥٦١ ٥٦٢ ٥٦٣ ٥٦٤ ٥٦٥ ٥٦٦ ٥٦٧ ٥٦٨ ٥٦٩ ٥٧٠ ٥٧١ ٥٧٢ ٥٧٣ ٥٧٤ ٥٧٥ ٥٧٦ ٥٧٧ ٥٧٨ ٥٧٩ ٥٨٠ ٥٨١ ٥٨٢ ٥٨٣ ٥٨٤ ٥٨٥ ٥٨٦ ٥٨٧ ٥٨٨ ٥٨٩ ٥٩٠ ٥٩١ ٥٩٢ ٥٩٣ ٥٩٤ ٥٩٥ ٥٩٦ ٥٩٧ ٥٩٨ ٥٩٩ ٦٠٠ ٦٠١ ٦٠٢ ٦٠٣ ٦٠٤ ٦٠٥ ٦٠٦ ٦٠٧ ٦٠٨ ٦٠٩ ٦١٠ ٦١١ ٦١٢ ٦١٣ ٦

∴ من ع ص هو الثالث المطلوب

(وترك للتلميذ البرهنة على هذه العملية بطريقة التركيب

تمارين على الدوائر والمثلثات

١ المعلوم دائرة نصف قطرها ه مستقيمات والمطلوب رسم مثلث متساوي الأضلاع داخلها وأخر خارجها أذكر في كل من الحالتين الحل العملي وبرهن عليه

٢ المطلوب رسم مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨ سنتيمترات وحساب طول نصف قطر كل من الدوائر المرسومة داخله والمرسومة خارجه والتي تمس أضلاعه من الخارج وقياس كل الى أقرب مليمتر بين السبب في أن نصف قطر الدائرة الثانية ضعف نصف قطر الأولى ونصف قطر الثالثة ثلاثة أمثاله

٣ المطلوب رسم مثلثات من الفروض الآتية

(أولاً) $1 = 5$ ستيمترات $6 = 6$ $66 = 6$ $60 = 6$

${}^0\text{Zz} = \text{ }^{\circ}6 \quad {}^0\text{Yz} = \text{ }^{\circ}6 \quad \gg \quad 5 = 7 \quad (\text{ثانياً})$

٢٣ = ٦ ٤١ = ٧ ٥ = ٦ (ثالثاً)

ارسم دائرة خارج كل مثلث وقس نصف قطرها الى اقرب مليمتر وبين السبب في أن النتائج الثلاثة متحدة بأن تقارن الزوايا الرأسية للثلثات

٤ ارسم مثلثا متساوي الأضلاع داخل دائرة نصف قطرها ٤ سنتيمترات واحسب طول ضلعه الى أقرب مليمترا وحقق ذلك بالقياس

ثم أوجد مساحة هذا المثلث وبرهن على أنها تساوى ربع مساحة المثلث المتساوى الأضلاع المرسوم خارج الدائرة المذكورة

٥ إذا كانت y مركز الدائرة المرسومة داخل $\triangle ABC$ نصف قطر هذه الدائرة

فَيَنْ أُن . Δ ي ن ح $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ س

6 Δ ی خ ا $= \frac{1}{4}$ و س

6 Δ ی ا ب = $\frac{1}{2}$ ح س

وبذا بزمن علی أن $\Delta ab = \frac{1}{r}(a+b+c)$

ثم حقق هذا القانون بأخذ المقاسات اللازمة في المثلث الذي أطوال أضلاعه ٩ سنتيمترات
٦ ٨ سنتيمترات ٦ ٧ سنتيمترات

٦. برهن على أنه إذا فرض أن $\frac{1}{p}$ نصف قطر الدائرة التي تمس المثلث من الخارج والتي تقابل a يحدث أن $\Delta a b c = \frac{1}{p} (a + b + c)$.

ثم حقق هذا الناتج بالقياس على فرض أن ٦ = ٥ سنتيمترات و ٧ = ٤ سنتيمترات و ٨ = ٣ سنتيمترات

٧. ا ب ح مثلث فيه $\angle \alpha = 63^\circ$ من السنتيمترات و $\angle \beta = 3^\circ$ سنتيمترات و $\angle \gamma = 51^\circ$ من

الستيمترات والمطلوب قياس نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث وانزال أعمدة من ١ ٦ ب ٦ ح على الأضلاع المقابلة لها وقياسها فاذا رمز لأطوال هذه الأعمدة بالرموز ع ٦ ع ٦ ع ٦ يحدث أن نصف

قطر الدائرة الخارجة $\frac{-1 \times 1}{-2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

تمارين على الدوائر والمربعات

- ١ ارسم دائرة نصف قطرها ٣ سنتيمترات وأوجد طريقة عملية لرسم مربع داخلها واحسب طول ضلعه الى أقرب مليمتر وحقق ذلك بالقياس ثم أوجد مساحة هذا المربع
- ٢ المطلوب رسم مربع خارج دائرة نصف قطرها ٣ سنتيمترات وبيان جميع الخطوط اللازمة للحل والبرهنة على أن مساحة المربع المرسوم خارج الدائرة ضعف مساحة المربع المرسوم داخلها
- ٣ ارسم مربعاً طول ضلعه ٧,٥ من السنتيمترات واذا كر حلاً عملياً لرسم دائرة داخله وبرهن عليه بواسطة التماثل
- ٤ ارسم دائرة خارج مربع طول ضلعه ٦ سنتيمترات ثم قس قطرها لأقرب مليمتر وحقق ذلك بالحساب
- ٥ ارسم مستطيلاً طول أحد أضلاعه ٧,٥ من السنتيمترات في دائرة نصف قطرها ٥,٤ من السنتيمترات وأوجد طول الضلع الثانى بالتقريب
- ثم برهن على أن مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة أكبر من مساحة أى مستطيل يرسم داخلها
- ٦ اذا رسمنا مربعاً ومثلثاً متساوى الأضلاع داخل دائرة ورمزنا لضلع المربع بالحرف ٦ ولضلع المثلث بالحرف ٦ كان

$$١٣ = ٦٢$$

- ٧ أ ب ح د مربع مرسوم داخل دائرة ٦ د نقطة قاطعة على القوس ا د برهن على أن د د التى يقابلها ا د ثلاثة امثال الزاوية التى رأسها فى د ويقابلها أى ضلع آخر

(مسائل عملية)

أذكر الحل العملى والبرهان النظرى

- ٨ ارسم معيناً خارج دائرة معلومة
- ٩ ارسم مربعاً داخل المربع ا ب ح د بحيث يكون أحد رؤوسه فى نقطة مثل س مفروضة على ا ب
- ١٠ ارسم مربعاً مساحته أصغر مما يمكن داخل مربع آخر معلوم
- ١١ ارسم (أولاً) دائرة خارج مستطيل معلوم
- (ثانياً) مربعاً خارج مستطيل معلوم
- ١٢ ارسم (أولاً) دائرة فى ربع دائرة معلومة
- (ثانياً) مربعاً فى ربع دائرة معلومة

عملية ٣.

متوالية للضلع المنتظم المطلوب رسمه داخل الدائرة م

كان كل من المثلثات $امب$ و $ابح$ و $مح$ و $م$ و $انخ$ متساوي

الساقين وكان كل منها ينطبق على الآخر تمام الانطباق

(فأولاً) لرسم المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه n داخل الدائرة نرسم الزاوية المركزية $\frac{360}{n}$ م

ثم نركزي أ أوفى ب ونصف قطريساوي أ ب نقسم المحيط الى أقواس متساوية ونصل بين نقط

(وثانياً) لرسم المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ٥ خارج الدائرة نعين أولاً النقط ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠

كما تقدم ويمتد من كل منها مماس للدائرة فيحدث من تقاطع هذه المماسات شكل تسهل

البرهنة على أن أضلاعه كلها متساوية وزواياه كذلك ويكون هو المضلع المطلوب

تنبيه — لا يكون الرسم الهندسى بهذه الطريقة دقيقا إلا اذا أمكن رسم الزاوية $\frac{360}{5}$ بالمسطرة والبرجل

تمارين

١ المطلوب رسم المضلعات المنتظمة الآتية داخل دائرة معلومة (نصف قطرها ٤ سنتيمترات

(أولاً) المسدس (ثانياً) المشتمل (ثالثاً) ذى الاثنى عشر ضلعاً

٢ ارسم خارج دائرة نصف قطرها ٣,٥ من السنتيمترات

(أولاً) مسدسا متظلاً. (ثانياً) مئمتا متظلاً

ثم بين صحة الرسم بالقياس وحقق ذلك بالبرهان

٣ إذا رسم مثلث متساوي الأضلاع ومسّ من منتظم داخل دائرة ورمز لضع المثلث بالحرف ^أ

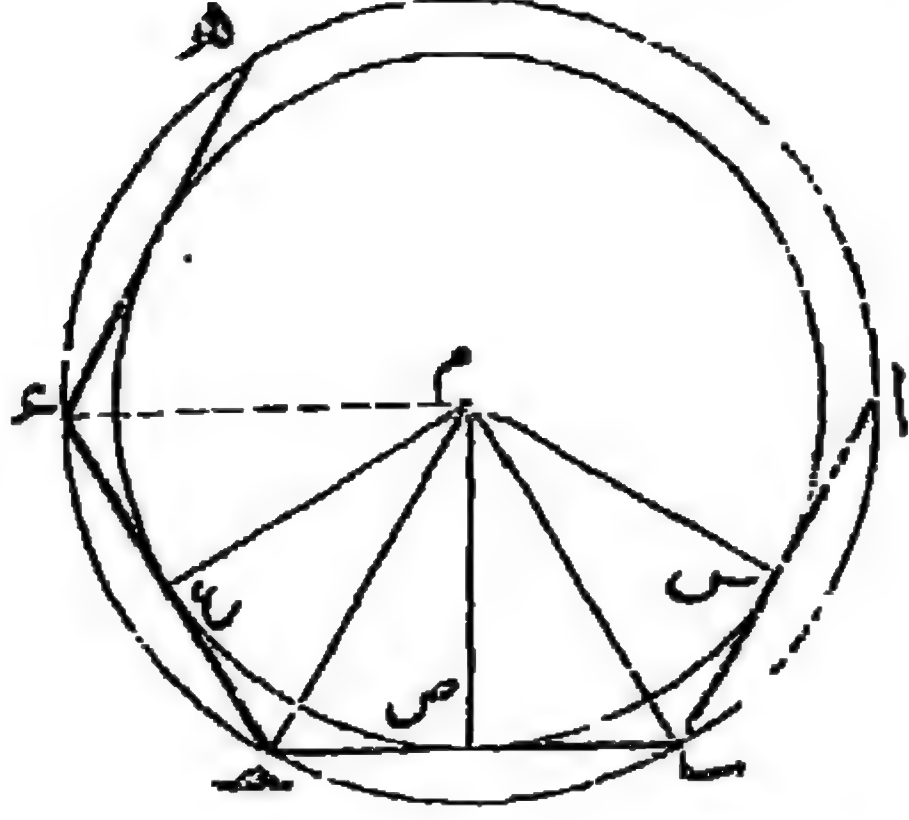
ولضلع المسدس بالحرف b فأثبت أن (أولا) مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ مساحة المسدس (ثانيا) $27 = 3^2$

٤ ارسم مسبقاً متظاً داخل دائرة نصف قطرها ٥ سنثيمترات باستعمال المنقلة واستخرج

بالحساب مقدار احدى زواياه وقسها وقس أحد الأضلاع

عملية ٣١

المعلوم مضلع منتظم والمطلوب رسم دائرة داخله وأخرى خارجه



نفرض أن $ا ب$ $ك ب$ $د ب$ $هـ ب$ $و ب$ $ز ب$ $ح ب$ $ا ب$ الخ

أضلاع متوالية من المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه ٨

وتنصف الزاويتين $ا ب$ $ك ب$ $د ب$ $هـ ب$ $و ب$ $ز ب$ $ح ب$ بالمستقيمين

$ب م$ $ك م$ $د م$ فيتقاطعان في $م$

فتكون $م$ هي مركز كل من الدائرتين الداخلة والخارجة

البرهان - نصل $م د$ فمن المثلثين المتطابقين $م ب د$ $م ك د$

نرى أن $م د$ ينصف $د هـ$ ومنه ينتج أن جميع منصفات زوايا المضلع تتقاطع في نقطة $م$

واذن يمكن البرهنة على أن

(نظرية ٦)

$$م ب = م ك = م د = م هـ = م و = م ز = م ح = م ا$$

∴ النقطة $م$ مركز الدائرة المرسومة خارج المضلع

ثم نزل من $م$ الأعمدة $م س$ $م ك$ $م د$ $م هـ$ $م و$ $م ز$ $م ح$ $م ا$ الخ

ونبرهن على أن $م س = م ك = م د = م هـ = م و = م ز = م ح = م ا$

من المثلثات المتطابقة

$ب س$ $ك م$ $د ب$ $هـ ب$ $و ب$ $ز ب$ $ح ب$ $ا ب$ الخ

فالنقطة $م$ هي اذن مركز الدائرة المرسومة داخل المضلع

تمارين

١ المطلوب رسم مسدس منتظم طول ضلعه ٤ سنتيمترات ورسم دائرة داخله وأخرى خارجه وحساب طول كل من قطريهما وقياسه لأقرب مليمترا

٢ أثبت أن مساحة المسدس المنتظم المرسوم داخل الدائرة تساوي ثلاثة أرباع مساحة المسدس المنتظم المرسوم خارجها

ثم استخرج مساحة مسدس منتظم مرسوم داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سنتيمترات لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر المربع

٣ اذا فرض أن $ا ب$ $ب ج$ مثلث متساوي الساقين مرسوم داخل دائرة وأن كلا من زاويتي القاعدة $ب ك$ $ك ج$ ضعف زاوية الرأس فأثبت أن $ب ج$ يساوي ضلع الخمس المنتظم الذي يمكن رسمه داخل هذه الدائرة

٤ ارسم بغير المنقلة

(أولا) مستسا منتظما

(ثانيا) مثنيا منتظما

طول ضلع كل منهما ٤ سنتيمترات ووجد مساحة كل بالتقريب

في محيط الدائرة

إذا قسمنا محيط أى دائرة وقسنا قطرها وقسمنا طول الأول على طول الثانى وجدنا أن طول المحيط يشتمل على طول القطر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ مرات تقريبا أى أن

$$\frac{\text{المحيط}}{\text{القطر}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ تقريبا}$$

ويمكن البرهنة على أن هذه النسبة ثابتة في جميع الدوائر

ويرمز لهذه النسبة عادة بالحرف ط وهو مقدار غير جذرى أى لا يمكن إيجاده إلا على وجه التقريب وقد بحث بعض الرياضيين في تعيين مقدار عظيم جدا من أرقامه العشرية لكنهم وجدوا أن المقدار ٣,١٤١٦ قريب من الحقيقة وكاف في الاعمال وهو بسبعة أرقام عشرية (أى ٣,١٤١٥٩٢٦) أقرب إلى الحقيقة طبعاً

أما المقدار المتقدم $\frac{1}{\sqrt{3}}$ فيساوى ٣,١٤٢٨ وهو أكبر من الحقيقة بكثير وفيه رقمان عشريان حقيقيان فقط

$$\text{ولما كان } \frac{\text{المحيط}}{\text{القطر}} = ط \text{ فعلى فرض أن } س = \text{نصف القطر}$$

$$\text{نجد أن } \frac{\text{المحيط}}{٢ س} = ط \text{ ومن ذلك يحدث أن}$$

$$\text{المحيط} = ٢ ط س$$

فاذا أريد معرفة طول محيط أى دائرة معلوم نصف قطرها نضع في المتساوية المذكورة بدل ط مقداره وهو إما $\frac{1}{\sqrt{3}}$ أو ٣,١٤١٦ أو ٣,١٤١٥٩٢٦ على حسب درجة الدقة والقرب من الحقيقة المرادة في الناتج

تنبيه — لايسع المقام هنا الآن شرح الطرق النظرية التى بها يمكن تعيين مقدار ط إلى الدرجة القريبة من الحقيقة ولكن بعمل مثل التجربة الآتية يسهل تعيينه إلى رقمين عشريين

. نلف على أسطوانة قطعة من الورق مستطيلة الشكل بحيث ينطبق طرفاها كل على الآخر ثم نثقبهما وبعد ذلك نترع الورقة ونسويها ونقيس البعد بين الثقبين فطولاه يساوى طول المحيط ثم نقيس القطر ونقسم الناتج الأول على الثانى فنخرج القسمة يعين مقدار ط

المحيط	القطر	مقدار ط
١٦ سنتيمترا	٥,١ من السنتيمترات	
٢٢,٣ من السنتيمترات	٧,١ »	
٣٣,٨ »	١٠,٨ »	

مثال ١ - عين مقدار ط من كل

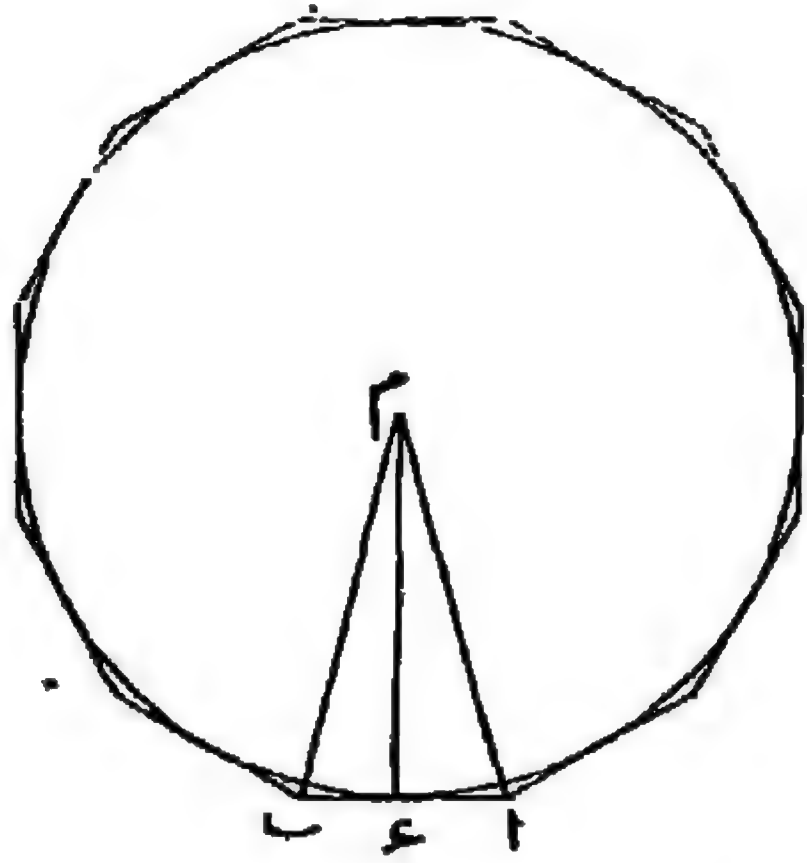
من الفروض المذكورة ثم أوجد

متوسط النتائج الثلاثة

مثال ٢ - خيط طوله ٧٥,٤ من البوصات أمكن لفة ٢٠ مرة على أسطوانة قطرها ١,٢ من البوصات مامقدار ط باعتبار أن كل لفة تساوى محيط قاعده الأسطوانة

مثال ٣ - عجلة قطرها ٢٨ بوصة تدور ٤٠٠ دورة اذا قطعت مسافة ٩٧٧ ياردة مامقدار ط

في مساحة الدائرة



اذا فرضنا أن ا ب أحد أضلاع المضلع الذى عدد أضلاعه
المرسوم خارج الدائرة التى مركزها م ونصف قطرها س

فمساحة المضلع = $\frac{1}{2} \times \text{أب} \times \text{م} \times \text{س}$

= $\frac{1}{2} \times \text{أب} \times \text{م} \times \text{س}$

= $\frac{1}{2} \times (\text{محيط المضلع}) \times \text{س}$

وهذا حقيقى مهما تضاعف عدد أضلاع المضلع

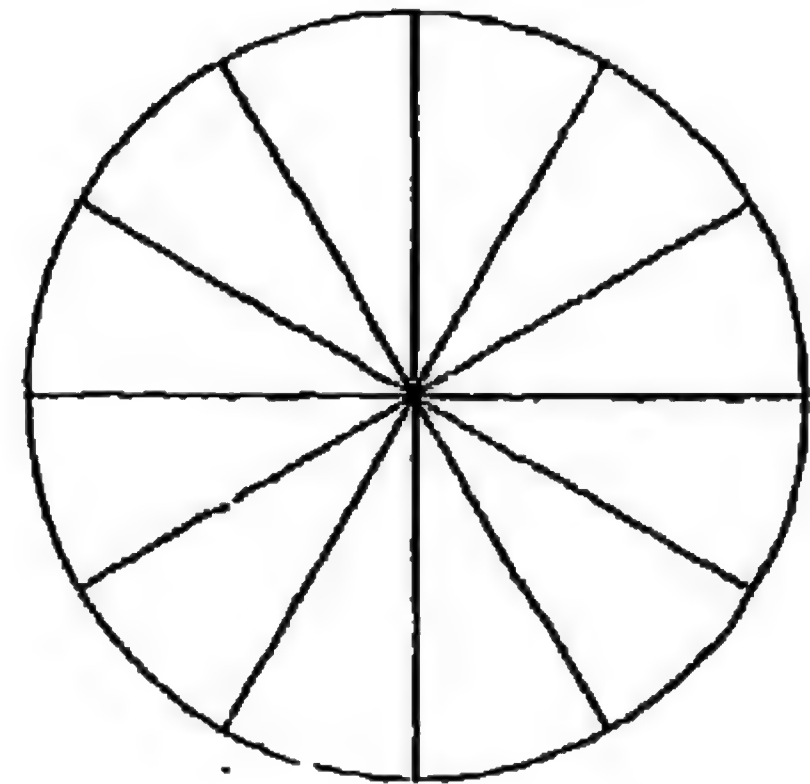
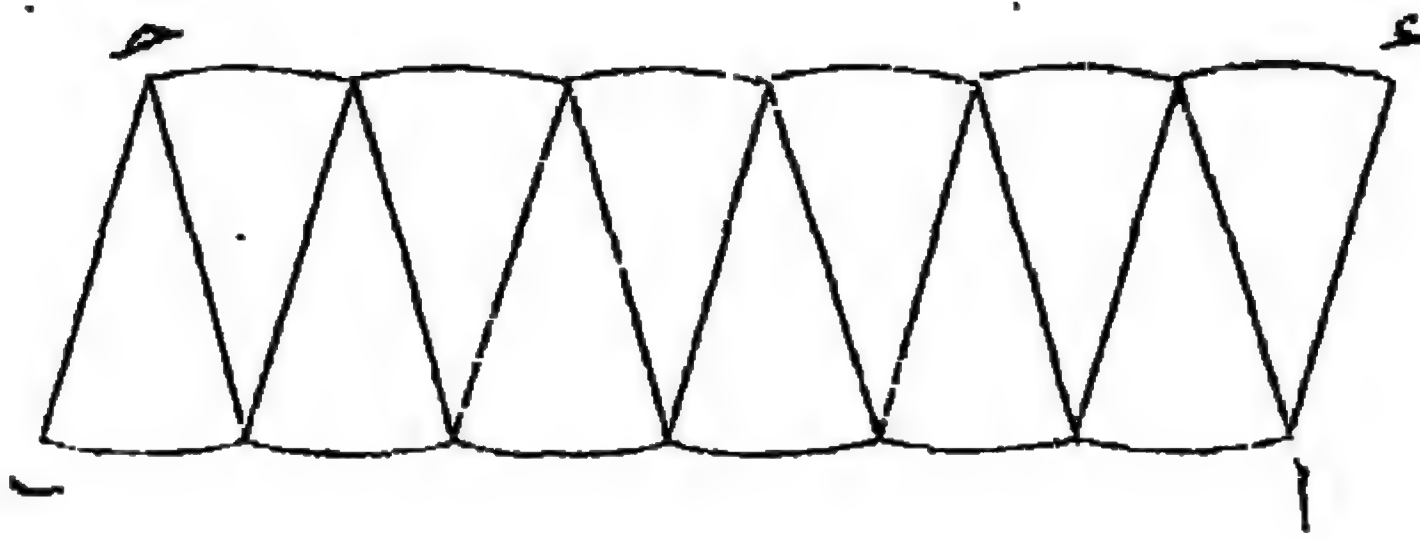
ويشاهد أنه كلما ضوعف عدد أضلاع المضلع اقترب محيطه من محيط الدائرة ومساحته من مساحتها
أى أن الفرق بين المحيطين وكذلك الفرق بين المساحتين يأخذ فى الصغر حتى اذا ضوعف عدد الأضلاع
الى ما لا نهاية صغر هذا الفرق الى أن يقرب من الصفر فيمكننا اذن أن نعتبر أن محيط الدائرة هو محيط
المضلع المنتظم الذى ضوعف عدد أضلاعه الى ما لا نهاية ومساحتها مساحة المضلع المذكور

وعلى هذا فمساحة الدائرة = $\frac{1}{2} \times \text{محيط الدائرة} \times \text{س}$

= $\frac{1}{2} \times \text{ط} \times \text{س}$

= $\frac{1}{2} \times \text{ط} \times \text{س}$

طريقة أخرى لايجاد مساحة الدائرة



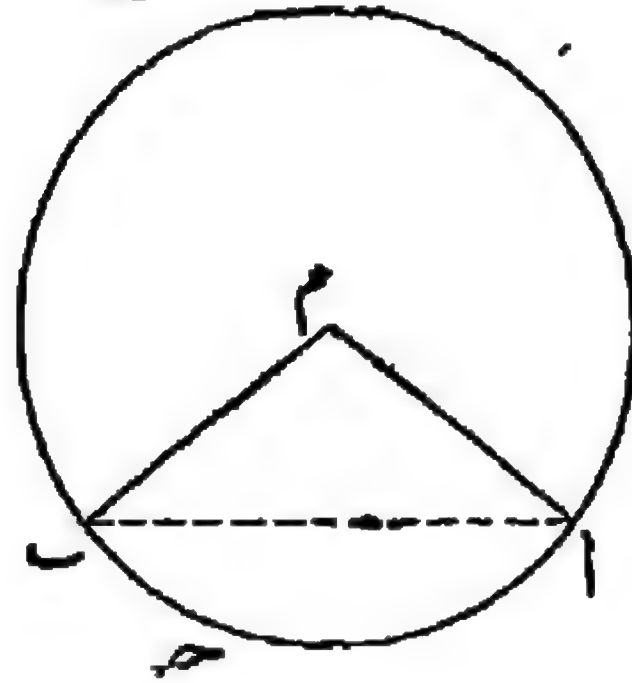
اذا فرضنا أن الدائرة منقسمة الى عدد زوجى من القطاعات ذات الزوايا المركزية المتساوية ورمزنا
لهذا العدد بالحرف د ووضعنا هذه القطاعات الواحد بجانب الآخر كما هو مبين فى الشكل

يحدث أن مساحة الدائرة = مساحة الشكل $ا ب ح د$
وهذه المتساوية حقيقية مهما تضاعف عدد القطاعات
ويشاهد أنه كلما ضوعف عدد هذه القطاعات صغر كل قوس من أقواسها وعلى ذلك
(أولاً) يقترب كل من الخطين $ا ب$ و $ك د$ المكونين من الأقواس قريباً كلياً الأول من المستقيم
 $ا ب$ والثاني من المستقيم $د$
(ثانياً) تقترب كل من الزاويتين $ب$ و $ك$ من القائمة
أي أنه إذا ضوعفت $د$ إلى ما لانهاية تحول الشكل إلى مستطيل قاعدته طول نصف محيط الدائرة
وارتفاعه نصف قطرها

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \frac{1}{2} \times \text{المحيط} \times \text{نصف القطر}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 ط \times س = ط س$$

مساحة القطاع



إذا كانت الزاوية المحصورة بين نصفى قطرين تساوى ٩٠° فإن ضلعها يحصران

(أولاً) قوساً طوله $\frac{1}{360}$ من المحيط

(ثانياً) قطاعاً مساحته $= \frac{1}{360}$ من مساحة الدائرة

\therefore إذا كانت الزاوية $ا م ب = د$ من الدرجات يحدث

(أولاً) أن القوس $ا ب = \frac{د}{360}$ من المحيط

(ثانياً) أن القطاع $ا م ب = \frac{د}{360}$ من مساحة الدائرة

$$= \frac{د}{360} \text{ من } \left(\frac{1}{2} \text{ محيط الدائرة} \times \text{نصف القطر} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ القوس } ا ب \times \text{نصف القطر}$$

مساحة القطعة

لايجاد مساحة القطعة الصغرى نستخرج مساحة المثلث الذي أضلاعه وتر القطعة ونصفا قطري الدائرة

ثم نطرح هذه المساحة من مساحة القطاع المشترك مع القطعة في القوس فتكون مساحة القطعة

$$ا ب ح د = \text{القطاع } ا م ب - \triangle ا م ب$$

ولايجاد مساحة القطعة الكبرى نستخرج مساحة القطعة الصغرى كما تقدم ونطرح هذه المساحة

من مساحة الدائرة

تمارين

(يراعى فى أخذ مقدار ط فى التمارين الآتية درجة التقريب المطلوبة فى الناتج)

- ١ المطلوب إيجاد طول محيطى دائرتين لأقرب مليمترا إذا كان نصف قطر أحدهما ٤,٥ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ١٠٠ سنتيمتر
- ٢ أوجد لأقرب مليمترا مربع مساحة دائرتين نصف قطر أحدهما ٥,٨ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٢٦,٣ من السنتيمترات
- ٣ دائرة داخل مربع طول ضلعه ٣,٦ من السنتيمترات أوجد طول محيطها ومساحتها الى رقمين عشريين
- ٤ مربع داخل دائرة نصف قطرها ٧ سنتيمترات أوجد الفرق بين مساحتهما لأقرب سنتيمتر مربع
- ٥ أوجد لأقرب مليمترا مربع مساحة السطح المحصور بين محيطى دائرتين متحدتى المركز نصف قطر أحدهما ١١,٤ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٨,٦ من السنتيمترات
- ٦ بين أن مساحة السطح المحصور بين محيطى دائرتين متحدتى المركز تساوى مساحة دائرة نصف قطرها طول المماس الممدود من أى نقطة على محيط الدائرة الكبرى الى الدائرة الصغرى
- ٧ مستطيل داخل دائرة قاعدته ٨ سنتيمترات وارتفاعه ٦ سنتيمترات أوجد مجموع مساحات القطع الأربع الخارجة عنه لأقرب عشر من السنتيمتر المربع
- ٨ ما طول ضلع المربع (لأقرب عشر من البوصة) الذى مساحته تساوى مساحة دائرة نصف قطرها ٥ بوصات
- ٩ مساحة السطح المحصور بين محيطى دائرتين متحدتى المركز ٢٢ سنتيمترا مربعا وعرضها سنتيمتر واحد ما طول نصفى القطرين فى الدائرتين بالتقريب مع العلم بأن $\frac{22}{7} = \pi$
- ١٠ ما الفرق لأقرب سنتيمتر مربع بين مساحة الدائرة المرسومة خارج مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ سنتيمترات وبين مساحة الدائرة المرسومة داخله
- ١١ ارسم على ورق المربعات دائرتين البعدان الاحداثيان لمركزيهما (٣ ٦ ٠) و (٠ ٦ ٦) من السنتيمترات ونصف قطر أولاهما ١,٤ من السنتيمترات ونصف قطر الثانية سنتيمتران ثم برهن على أن الدائرتين تماسان وأوجد بالتقريب محيط كل منهما ومساحته
- ١٢ ارسم دائرة نصف قطرها سنتيمتران والبعدان الاحداثيان لمركزها (٣,٢ ٦ ٢,٤) من السنتيمترات ثم ارسم دائرتين أخريين مركز كل منهما نقطة الأصل ونصف قطر الأولى سنتيمتران ونصف قطر الثانية ٦ سنتيمترات وبرهن على أن كلا منهما تمس الدائرة الأولى

تمارين على الدوائر المرسومة داخل المثلث وخارجه والمماس له من الخارج

(مسائل نظرية)

١ ارسم دائرة تماس مستقيمين متوازيين ومستقيما آخر قاطعا لهما ثم بين أنه يمكن رسم دائرتين متساويتين في هذه الحالة

٢ اذا ساوى من مثلث قاعدته وزاوية رأسه نظيرتيهما من مثلث آخر كانت الدائرتان المرسومتان خارج المثلثين متساويتين

٣ ا ب ح مثلث كى مركز الدائرة المرسومة داخله ك مركز الدائرة المرسومة خارجه برهن على أنه لو كانت النقط ا كى ك على استقامة واحدة لكان $ا ب = ا ح$

٤ مجموع قطرى الدائرتين المرسومة إحداهما داخل مثلث قائم الزاوية والأخرى خارجه يساوى مجموع ضلعي القائمة

٥ اذا كانت الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب ح تماس أضلاعه فى د ه و فاب زوايا المثلث د ه و تساوى على الترتيب $٩٠^\circ - \frac{ا}{٢} - \frac{ب}{٢} - \frac{ج}{٢}$

٦ اذا فرضنا أن كى مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب ح كى مركز الدائرة المماسية للضلع ب ح وامتداد الضلعين الآخرين فانه يمكن أن يمر بالنقط كى ك ب كى ك ح محيط دائرة

٧ الفرق بين أى ضلعين من مثلث يساوى الفرق بين جزأى الضلع الثالث اللذين ينقسم إليهما بنقطة تماس الدائرة الداخلة

٨ فى المثلث ا ب ح النقطة كى مركز الدائرة الداخلة ك مركز الدائرة الخارجة برهن على أن المستقيم كى ك تقابله زاوية رأسها فى ا تساوى نصف الفرق بين زاويتي القاعدة وبذا برهن على أنه اذا أنزل العمود ا د على ب ح كان ا كى منصف زاوية د ا ك

٩ قطرا الشكل الرباعى ا ب ح د متقاطعان فى م برهن على أنه اذا وصل بين مراكز الدوائر المرسومة خارج المثلثات ا م ب ك م د ح م ا يحدث شكل متوازى الأضلاع

١٠ ا ب ح مثلث والنقطة كى مركز الدائرة الداخلة برهن على أنه اذا وصل ا كى وم د على استقامته حتى قطع محيط الدائرة المرسومة خارج المثلث فى م كانت هذه النقطة مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث ب كى ح

١١ المطلوب رسم المثلث المعلوم منه القاعدة والارتفاع ونصف قطر الدائرة المرسومة خارجه

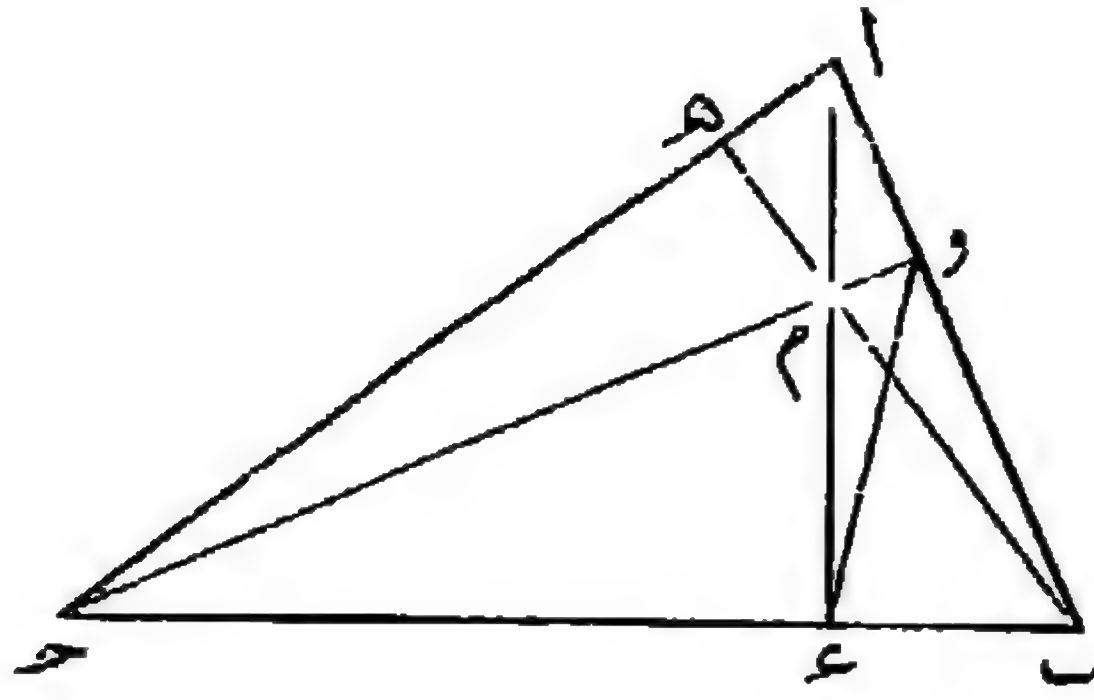
١٢ اذا تماس من الخارج ثلاث دوائر مراكزها ا ب ك ح مشى فى د ه و كانت الدائرة الداخلة للمثلث ا ب ح هى عين الدائرة الخارجة للمثلث د ه و

نظريات وأمثلة على الدوائر والمثلثات

ملتقى ارتفاعات المثلث

١ الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الأضلاع المقابلة لها تتلاقى جميعا في نقطة واحدة

في $\triangle ABC$ أنزلنا من الرأس A العمود AD على الضلع BC ومن B العمود BE على الضلع AC فيتلاقى هذان العمودان في M



فإذا وصلنا B M ومددناه على استقامته حتى قابل AD في H فانه يطلب البرهنة على أن BH عمود على AC لذلك نصل D و

فمن حيث ان الزاويتين M و B K M و D قائمتان∴ النقط M و K و B و D يمر بها محيط دائرة واحد∴ $BD = DM$ لأنهما في قطعة واحدة $AD = AM$ للتعادل بالرأسومن حيث ان الزاويتين A و K A و D قائمتان∴ النقط A و K و B و D يمر بها محيط دائرة واحد∴ $AD = DK$ لأنهما في قطعة واحدة∴ $AD = AM + DK = DM + DK = BK$ $AD = BK$ ∴ الزاوية الثالثة $AH = M$ U (نظرية ١٦)أى أن BH عمود على AC فالأعمدة AD و BE و CH و اذن تتلاقى جميعا في النقطة M وهو المطلوب

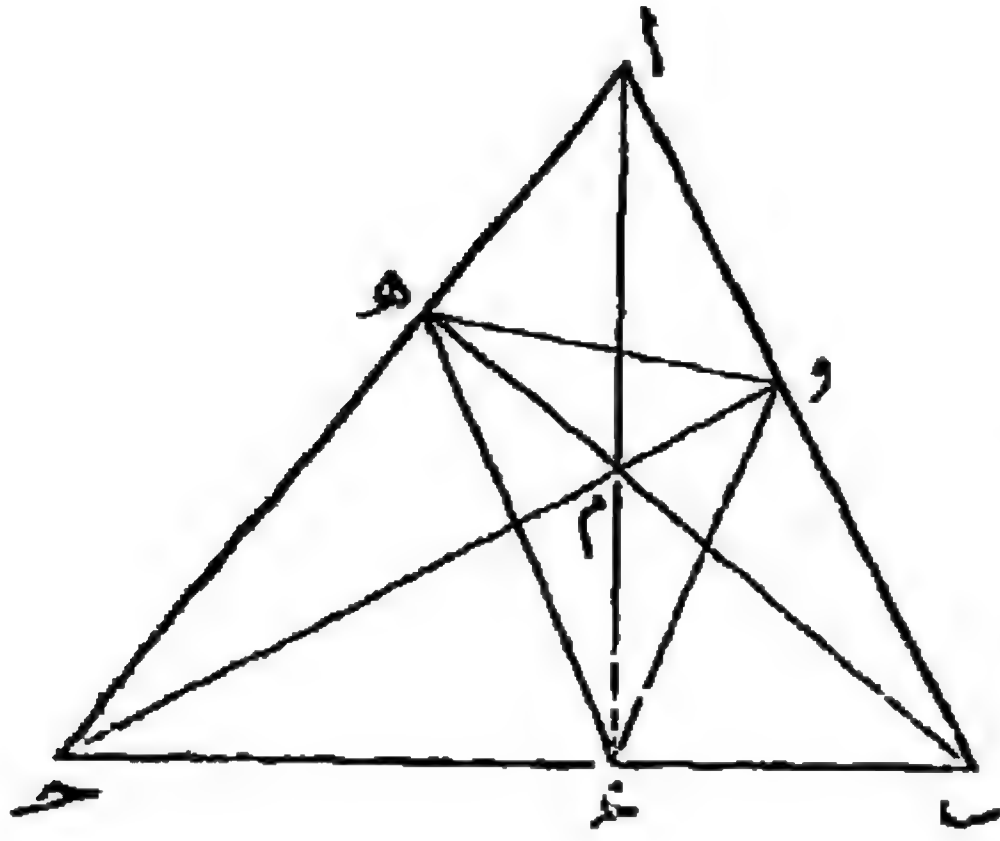
تعريفات

(١) نقطة تلاقى الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث على أضلاعه تسمى ملتقى الارتفاعات

(٢) المثلث الحادث من وصل مواقع الارتفاعات يسمى مثلث المواقع

٢ الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث الحاد الزوايا على الأضلاع المقابلة لها تنصف زوايا مثلث المواقع

في المثلث الحاد الزوايا ABC أنزلنا الأعمدة AD BE CF على الأضلاع من الرؤوس المقابلة لها فتقاطعت في M ثم وصلنا بين مواقع هذه الأعمدة بمستقييات فحدث مثلث المواقع DEF و
ويراد إثبات أن AD BE CF تنصف الزوايا D E F



البرهان — النقط M D E F يمر بها محيط دائرة واحد كما تقدم في النظرية السابقة

∴ $\angle DME = \angle DMF$ لأنهما في قطعة واحدة

وكذلك النقط M E F D يمر بها محيط دائرة واحد

∴ $\angle DME = \angle DMF$ لأنهما في قطعة واحدة

لكن $\angle DME = \angle DMF$ لأن كلا منهما تتم $\angle DME$

∴ $\angle DME = \angle DMF$

وبالطريقة عينها يبرهن على أن AD ينصف $\angle D$ و BE ينصف $\angle E$ وهو المطلوب

نتيجة ١ — كل ضلعين من مثلث المواقع متلاقين على ضلع من المثلث الأصلي يصنعان مع هذا الضلع زاويتين متساويتين

لأن الزاوية $\angle DME$ تتم $\angle DME$

∴ تتم $\angle DME$

لكن $\angle DME$ تتم $\angle DME$

∴ $\angle DME = \angle DMF$ التي هي $\angle DME$

وبالطريقة عينها يمكن إثبات أن $\angle DME = \angle DMF$

∴ $\angle DME = \angle DMF = \angle DME$

وبالطريقة عينها يمكن إثبات أن

$\angle DME = \angle DMF = \angle DME$

$\angle DME = \angle DMF = \angle DME$

نتيجة ٢ — زوايا المثلثات DEF ABC متساوية وتساوي زوايا المثلث ABC

تنبيه — إذا كانت الزاوية $\angle A$ منفرجة فإن العمودين BE CF ينصفان زاويتي مثلث المواقع الخارجيتين

تمارين

- ١ م ملتي الارتفاعات في المثلث $ا ب ح$ مددنا العمود $ا د$ حتى قابل الدائرة المرسومة خارج المثلث في $ع$ برهن على أن $م د = د ع$
- ٢ أضلاع المثلث الحاد الزوايا تنصف الزوايا الخارجة لمثلث المواقع أما المثلث المنفرج الزاوية فان ضلعي المنفرجة فيه ينصفان زاويتين داخليتين
- ٣ م ملتي الارتفاعات في المثلث $ا ب ح$ برهن على أن الزاويتين $ب م ح$ و $ك ب ا$ متكاملتان
- ٤ اذا كانت م ملتي الارتفاعات في المثلث $ا ب ح$ فان كلا من النقط الأربع $م ك ا ب$ و $ع$ ملتي الارتفاعات في المثلث الذي رؤوسه النقط الثلاث الأخرى
- ٥ كل من الدوائر الثلاث التي تمر برأسي مثلث وملتي ارتفاعاته تساوي الدائرة الخارجة المارة برؤوسه
- ٦ النقطتان $د ك$ مفروضتان على نصف محيط دائرة مرسوم على المستقيم $ا ب$ فاذا وصلنا $د ا$ و $ب ه$ فتقاطعا (هما أو امتدادهما) في $ح$ ثم وصلنا $ا ه$ و $ب د$ فتقاطعا (هما أو امتدادهما) في $و$ كان $و ح$ عمودا على $ا ب$
- ٧ $ا ب ح$ مثلث $ك م$ ملتي ارتفاعاته فاذا كان $ا د$ قطر الدائرة المارة برؤوسه كان $ب م ح د$ متوازي الأضلاع
- ٨ اذا وصلنا بين ملتي ارتفاعات المثلث وبين منتصف القاعدة بمستقيم ومددناه على استقامته حتى قابل الدائرة المرسومة على المثلث في نقطة كانت هذه النقطة منتهى القطر المار برأس المثلث
- ٩ اذا مددنا العمود النازل من رأس المثلث على قاعدته حتى قابل محيط الدائرة المارة برؤوسه في $ل$ ثم وصلنا من ملتي الارتفاعات الى منتصف القاعدة بمستقيم ومددناه على استقامته أيضا حتى قابل المحيط في $و$ كان $ل و$ موازيا للقاعدة
- ١٠ المستقيم الواصل من ملتي الارتفاعات الى أي رأس في المثلث يساوي ضعف العمود النازل من مركز الدائرة المرسومة خارجه على الضلع المقابل لهذا الرأس
- ١١ اذا رسمنا ثلاث دوائر كل منها يمر بملتي ارتفاعات مثلث ورأسين منه فان المثلث الحادث من توصيل مراكز هذه الدوائر ينطبق تمام الانطباق على المثلث الأصلي
- ١٢ ارسم المثلث المعلوم منه رأس وملتي ارتفاعاته ومركز الدائرة المرسومة خارجه

المحال الهندسية

٣ المطلوب إيجاد المحل الهندسي لملتقى ارتفاعات المثلث اذا علمت منه القاعدة وزاوية الرأس

نفرض أن $\angle B = \alpha$ القاعدة المعلومة $\angle C = \beta$ زاوية الرأس

فاذا فرضنا أن $\angle A = \gamma$ مثلث قائم المرسوم على $\angle B = \alpha$

وزاوية رأسه $\angle A$ تساوي الزاوية المعلومة $\angle C = \beta$

وأنزلنا من $\angle B = \alpha$ العمودين $\angle B = \alpha$ وفتقاطعا

في M التي هي ملتقى الارتفاعات

فانه يطلب إيجاد المحل الهندسي للنقطة M

البرهان — من حيث ان كلا من زاويتي $\angle A = \gamma$ و $\angle B = \alpha$ واقائمة

النقط $M = \angle A = \gamma$ و $\angle B = \alpha$ ويمر بها محيط دائرة

و $M = \angle B = \alpha$ تكمل $\angle A = \gamma$

و $M = \angle C = \beta$ المقابلة بالرأس تكمل $\angle B = \alpha$

ولكون $\angle A = \gamma$ تساوي $\angle B = \alpha$ دائما مهما تحركت النقطة M فمقدارها ثابت ومكملتها ثابتة كذلك

أي أن قاعدة $\angle B = \alpha$ معلومة وزاوية رأسه ثابتة المقدار

فالمحل الهندسي لرأسه M هو قوس للقطعة التي وترها $\angle B = \alpha$ والتي تقبل زاوية تساوي مكملة $\angle C = \beta$

٤ المطلوب إيجاد المحل الهندسي لمركز الدائرة المرسومة داخل المثلث اذا علمت منه القاعدة

وزاوية الرأس

اذا فرضنا أن $\angle B = \alpha$ أحد أوضاع المثلث المرسوم

على القاعدة المعلومة $\angle C = \beta$ وزاوية رأسه $\angle A = \gamma$ تساوي

الزاوية المعلومة $\angle C = \beta$

وأن منصفات زواياه $\angle A = \gamma$ و $\angle B = \alpha$ و $\angle C = \beta$

تقاطعت في النقطة O مركز الدائرة الداخلة

فانه يطلب إيجاد المحل الهندسي للنقطة O

البرهان — نرمز لزوايا $\angle A = \gamma$ و $\angle B = \alpha$ و $\angle C = \beta$ بالحروف α و β و γ بالحرف α فيحدث

في $\triangle BOC$ أن $\angle BOC = \alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ (نظرية ١٦) (١)

ومن $\triangle AOC$ يحدث أن $\angle AOC = \alpha + \beta + \gamma = 2\pi$

أي أن $\angle AOC = \alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ (٢)

وبطرح (٢) من (١)

يحدث أن $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) - \beta$

أو $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) - \beta$

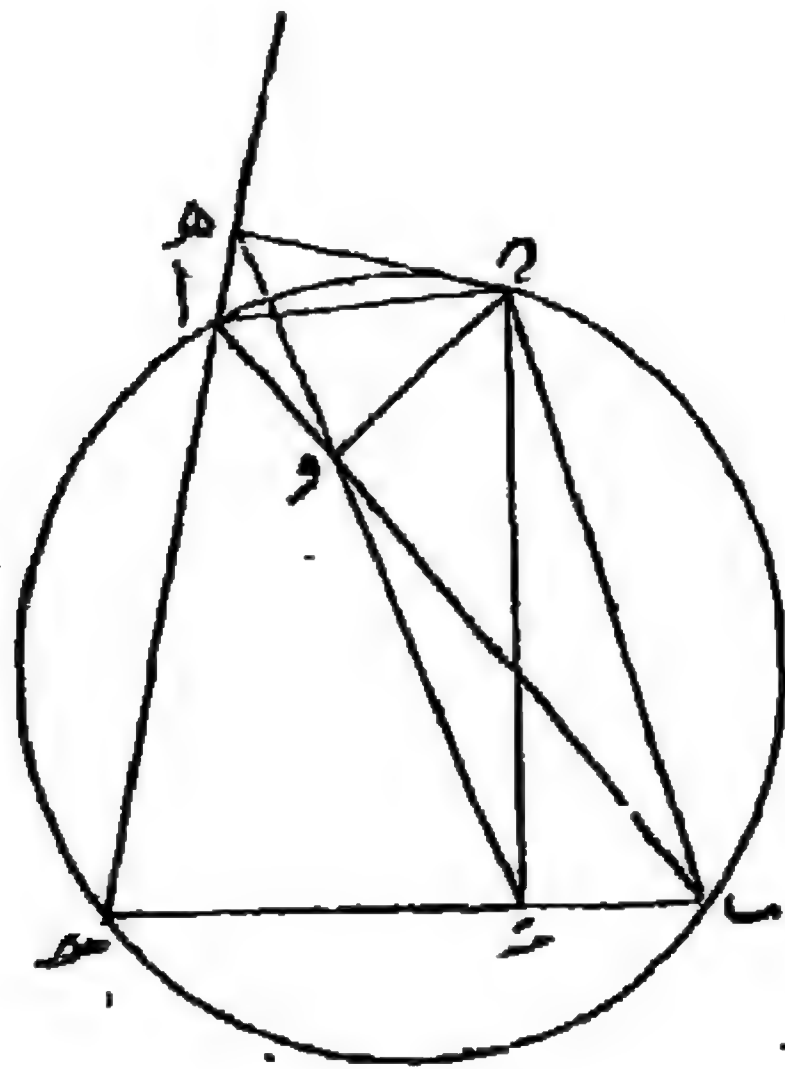
ولكون Δ ثابتة المقدار لأنها تساوى S دائما مهما تحركت النقطة A
 Δ ثابتة كذلك .

فالمحل الهندسى للنقطة Y اذن هو قوس القطعة التي وترها B Δ المعلوم والتي تقبل زاوية ثابتة مقدارها
يساوى $(\alpha + \frac{1}{4} S)$

تمارين على المحال الهندسية

- ١ مثلث معلوم منه القاعدة B Δ وزاوية الرأس A والمطلوب إيجاد المحل الهندسى لمركز الدائرة التي تمس ضلع المثلث B Δ وامتداد الضلعين الآخرين
- ٢ A B مستقيم رسمنا من نهايتيه المستقيمين المتوازيين A L K B M والمطلوب إيجاد المحل الهندسى لنقطة تقاطع منصفى الزاويتين B A L K B M
- ٣ دائرة يراد إيجاد المحل الهندسى لمنتصفات أوتارها المارة بنقطة واحدة سواء كانت هذه النقطة داخل الدائرة أو على محيطها أو خارجها
- ٤ ماهو المحل الهندسى لنقط تماس المماسات الممدودة من نقطة مفروضة الى جملة دوائر متحدة المركز
- ٥ ماهو المحل الهندسى لنقطة تقاطع مستقيمين يمران بنقطتين معلومتين على محيط دائرة ويحصران بينهما من المحيط طول معلوما
- ٦ A B نقطتان على محيط دائرة L K قطرفيها ماهو المحل الهندسى لنقطة تقاطع L A K B
- ٧ A B Δ مثلث مرسوم على القاعدة المعلوم B Δ وزاوية رأسه ثابتة المقدار مددنا B A على استقامته الى K بحيث يكون B K مساويا لمجموع ضامى زاوية الرأس ماهو المحل الهندسى للنقطة K
- ٨ A B وتر ثابت في دائرة K A Δ وتر متحرك فيها ماز بالنقطة A فاذا اكملنا متوازي الأضلاع B Δ فما هو المحل الهندسى لنقطة تقاطع قطريه
- ٩ L K مستقيم طرفاه على مستقيمين متعامدين يتحرك بينهما أقننا من L العمود L S على أحد المستقيمين المتعامدين ومن K العمود K S على المستقيم العمودى الآخر فتقابل L S K S في نقطة S ماهو المحل الهندسى لهذه النقطة
- ١٠ دائرتان متقاطعتان في A K B فرضنا على أحد المحيطين نقطة مثل K ومددنا منها مستقيمين يمران بالنقطتين A K B ويقابلان المحيط الآخر في S K V ثم وصلنا المستقيمين A V K B S فتقاطعا في نقطة أوجد محلها الهندسى
- ١١ دائرتان متقاطعتان في A K B رسمنا مستقيما مارا بالنقطة A وطرفه Δ على أحد المحيطين K D على المحيط الثانى ثم رسمنا مستقيما آخر مارا بالنقطة A أيضا طرفه L على المحيط الأول K D على الثانى أوجد المحل الهندسى لنقطة تقاطع K D L D على فرض أن المستقيم Δ A ثابت لا يتحرك

• مواقع الأعمدة النازلة على أضلاع المثلث من أى نقطة على محيط الدائرة المرسومة خارجه على استقامة واحدة



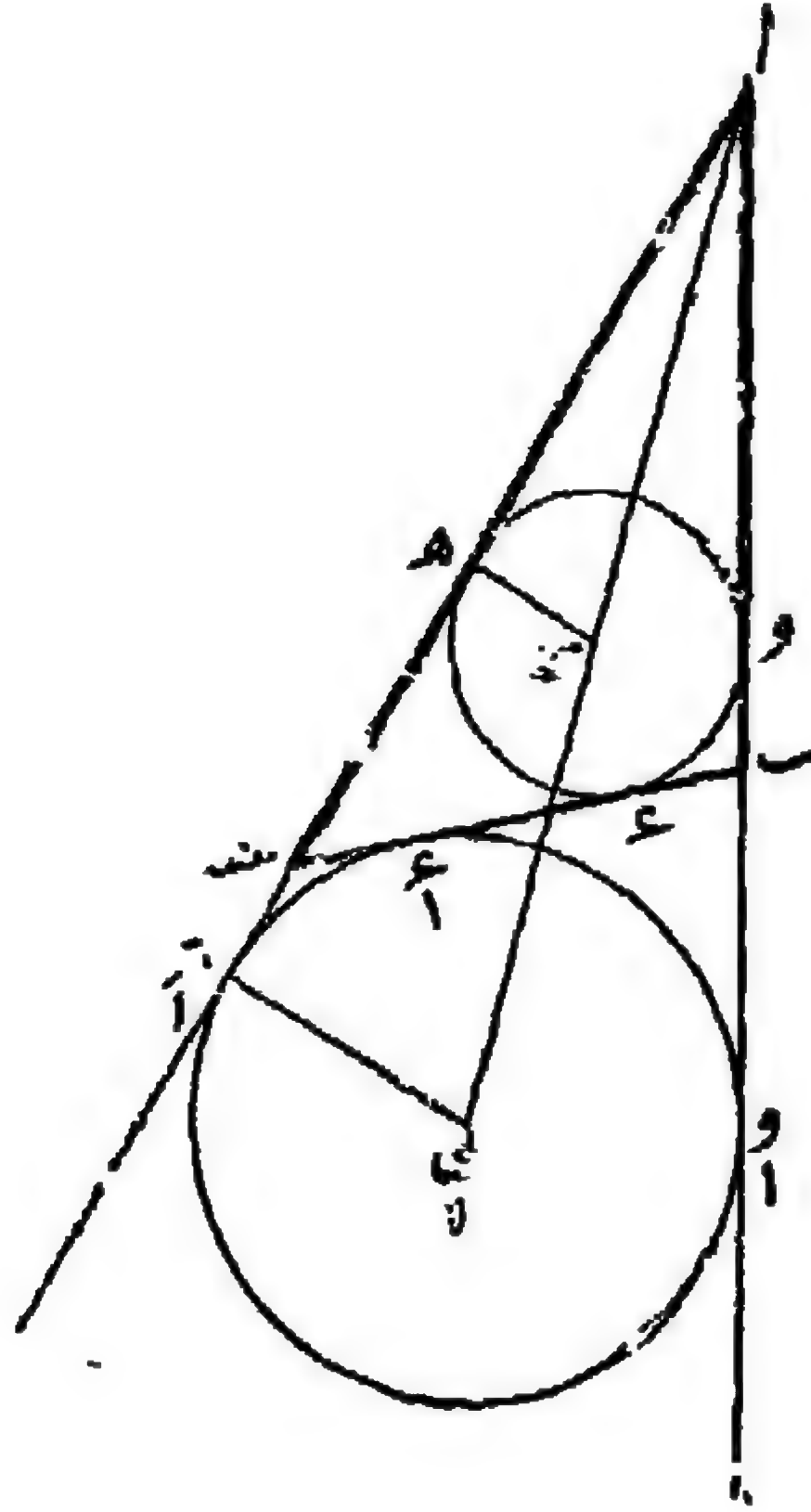
ملاحظة المستقيم ، و هـ يسمى مستقيم المواقع للنقطة د بالنسبة الى المثلث ا ب ح وهو المعروف بخط سمسون

تمارين

- ١ أنزلنا من نقطة δ على محيط دائرة مارة برؤوس المثلث $أ ب ح$ العمودين $\delta د$ و $\delta هـ$ على الضلعين $ب ح$ و $أ ح$ ثم وصلنا $هـ د$ فإذا قطع هذا المستقيم أو امتداده الضلع $أ ب$ في $و$ كان δ وعمودا على $أ ب$
- ٢ المطلوب إيجاد المحل الهندسي للنقطة التي تسير على شرط أن تكون مواقع الأعمدة النازلة منها على أضلاع مثلث معلوم على استقامة واحدة
- ٣ $أ ب ح$ و $أ ب ح$ و $أ ب ح$ مثلثان متشابهان في زاوية الرأس $أ$ رسمنا دائرة مارة برؤوس كل منهما فتقاطع المحيطان في δ برهن على أن مواقع الأعمدة النازلة من هذه النقط على الأضلاع $أ ب$ و $أ ح$ و $ب ح$ على استقامة واحدة
- ٤ إذا رسمنا مثلثا داخل دائرة ووصلنا بمسستيم من ملتقى ارتفاعاته إلى نقطة ما مثل δ على المحيط كان مستقيم المواقع (خط ممسكون) لهذه النطقة منصفيا للمستقيم المذكور

المثلث والدوائر المتعلقة به

٦ د ك ه و نقط تماس الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب ح د ك ه و نقط تماس الدائرة الماسة ب ح وامتداد الضلعين الآخرين فاذا رمزنا لأضلاع المثلث بالرموز ا ب ح و بالرمز ع لنصف مجموع أضلاعه وبالرمز س لنصف قطر الدائرة الداخلة و س لنصف قطر الدائرة التي تماس ب ح وامتداد الضلعين الآخرين



فانه يراد اثبات ما يأتي

(أولاً) ان ا ه = ا و = ا ح - ع

ك ب د = ب و = ب ح - ع

ك ح د = ح و = ح ا - ع

(ثانياً) ان ا ه = ا و = ا ح - ع

(ثالثاً) ان ك د = ك ه = ك ح - ع

ك ب د = ب و = ب ح - ع

(رابعاً) ان ب د = ب و = ب ح - ع

(خامساً) ان ه د = ه و = ه ا - ع

(سادساً) ان مساحة ا ب ح = س × ع

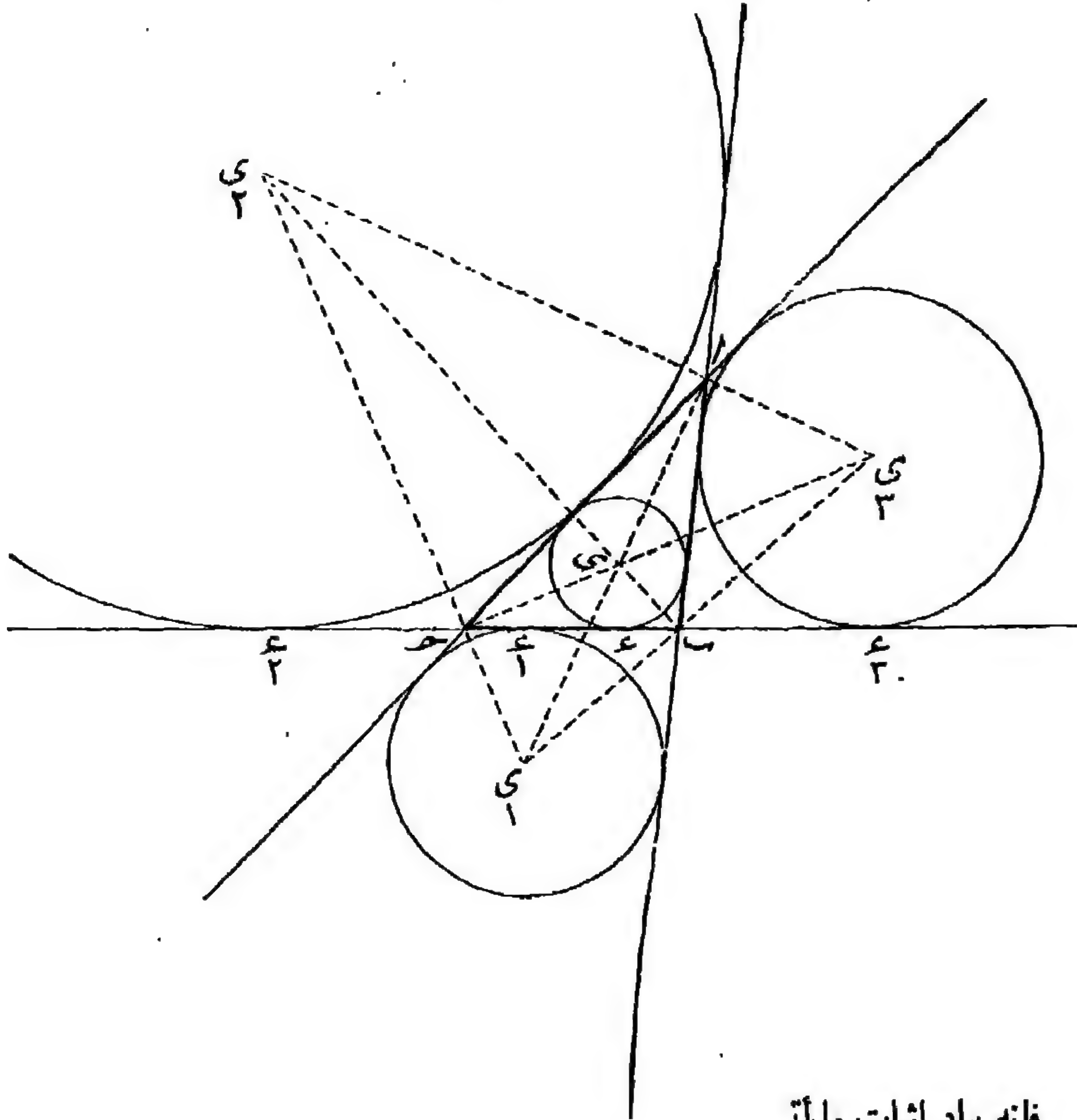
= س (١ - ع)

(سابعاً) بعد رسم الشكل المتقدم في حالة ما اذا كانت > ب قائمة يبرهن على أن

س = ع - ب

ك س = ع - ح

٧ اذا كانت Y مركز الدائرة الداخلة للمثلث ABC
 ٦ Y_1 مركز الدائرة المحاسة للضلع BC وامتداد الضلعين الآخرين
 ٦ Y_2 » » » » » »
 ٦ Y_3 » » » » » »



فانه يراد إثبات ما يأتى

(أولاً) أن (١) النقطة A Y_1 Y_2 على استقامة واحدة
 (٢) » B Y_1 Y_3 »
 (٣) » C Y_2 Y_3 »
 (ثانياً) أن (١) » Y_1 A Y_2 »
 (٢) » Y_2 B Y_3 »
 (٣) » Y_3 C Y_1 »

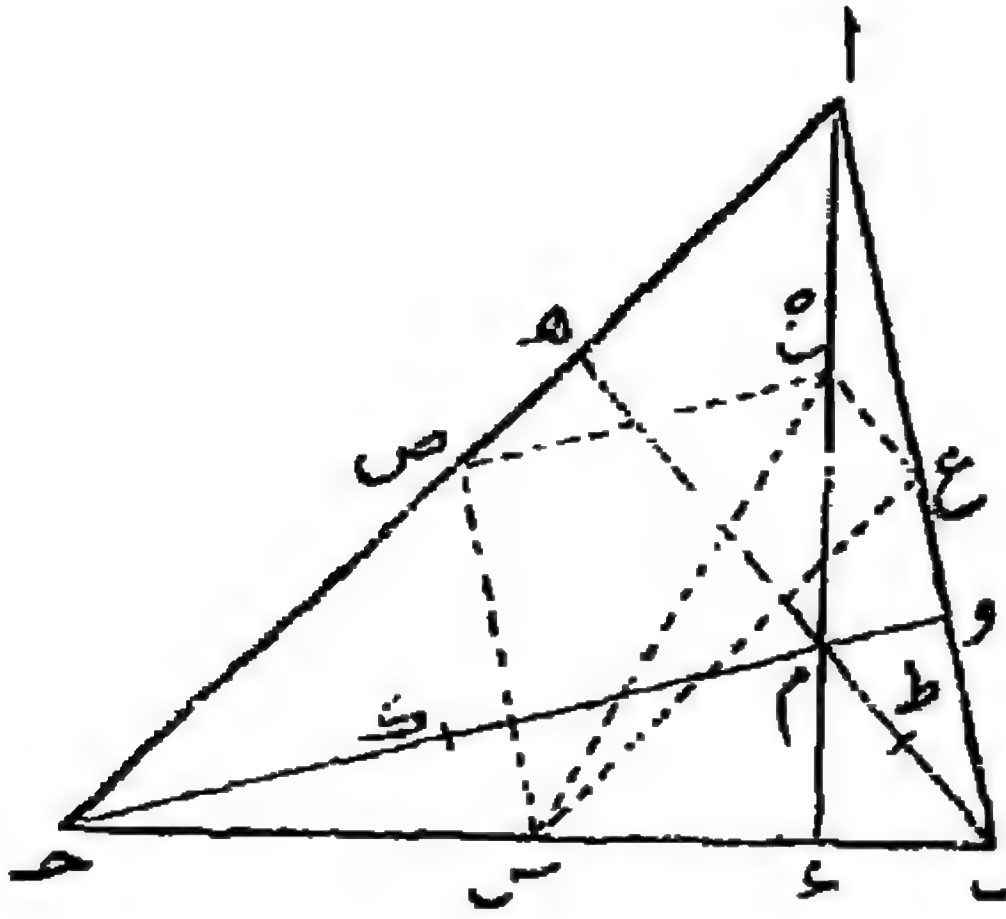
(ثالثاً) ان المثلثات BY_1C AY_2B CY_3A متساوية في الزوايا
 (رابعاً) ان زوايا $\Delta Y_1Y_2Y_3$ تساوى زوايا المثلث الحادث من وصل نقط تماس الدائرة الداخلة
 (خامساً) ان كلا من النقط الأربع Y Y_1 Y_2 Y_3 ملتقى ارتفاعات المثلث الذى رؤوسه
 النقط الثلاث الأخرى
 (سادساً) ان الدوائر الأربع المار كل منها بأى ثلاث من النقط Y Y_1 Y_2 Y_3 متساوية

٩ ا ب ح مثلث ك ي م مركز الدائرة التي تمس ا ب ح وامتداد الضلعين الآخرين ك ي م
مركز الدائرة التي تمس ا ب وامتداد الضلعين الآخرين برهن على أن النقط ب ك ح ك ي م على
محيط دائرة مركزها على محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب ح

- ١٠ المطلوب رسم ثلاث دوائر معلومة مراكزها تتماس مثنى كم حلا لهذه المسألة
- ١١ المعلوم مراکز الدوائر الثلاث التي تماس مثلثا من الخارج والمطلوب إنشاء هذا المثلث
- ١٢ معلوم مركز الدائرة المرسومة داخل مثلث ومركزا دائرتين تماسانه من الخارج ويراد إنشاء المثلث
- ١٣ المعلوم زاوية الرأس من مثلث ومحيطه ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله والمطلوب إنشاؤه
- ١٤ المعلوم زاوية الرأس من مثلث ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله وطول العمود النازل من الرأس على القاعدة والمطلوب إنشاؤه
- ١٥ ي مركز الدائرة المرسومة داخل Δ ا ب ح برهن على أن مراکز الدوائر المارة برؤوس المثلثات ب ي ح ك ا ي ب تقع على محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب ح

نظرية النقط التسع

٨ محيط الدائرة المارة بمتصفات أضلاع المثلث يمر بمواقع ارتفاعاته وبمتصفات الأبعاد المحصورة بين ملتقى الارتفاعات ورؤوس المثلث



إذا فرضنا أن A B C المثلث المعلوم وأن النقط S Q R P N M متصفات الأضلاع B C A C B A والنقط D E F H G O مواقع الارتفاعات النازلة على الأضلاع من الرؤوس A B C والنقطة M ملتقى الارتفاعات A C B P N M متصفات A B C M P N

فانه يطلب إثبات أن النقط التسع S Q R P N M D E F H G O يمر بها جميعا محيط دائرة واحد

لذلك نصل S Q R P N M D E F H G O ففى المثلث A B C

لكون A S $=$ B Q $=$ C R $=$ A M $=$ B N $=$ C P

∴ S Q R P N M D E F H G O يمر بها جميعا محيط دائرة واحد

وفى المثلث A B C لكون A S $=$ B Q $=$ C R $=$ A M $=$ B N $=$ C P

∴ S Q R P N M D E F H G O يمر بها جميعا محيط دائرة واحد

ثم اذا مدد M على استقامته كان عمودا على A B

وعليه D S $=$ C R $=$ A M $=$ B N $=$ C P

∴ النقط S Q R P N M D E F H G O يمر بها جميعا محيط دائرة واحد

أى أن E تقع على المحيط المارة بالنقطة S Q R P N M وأن S E قطر لهذه الدائرة

وكذلك يمكن إثبات أن F Q R P N M D E H G O تقعان على هذا المحيط

ومن حيث أن D E $=$ C R $=$ A M $=$ B N $=$ C P

∴ محيط الدائرة الذى قطرها S E يمر بالنقطة D

وكذلك يمكن إثبات أن H Q R P N M D E F G O تقعان على هذا المحيط

فالنقط S Q R P N M D E F H G O كلها على محيط دائرة واحد وهو المطلوب

ملاحظة — بناء على هذه الخاصية تسمى الدائرة المارة بمتصفات أضلاع المثلث بدائرة النقط التسع

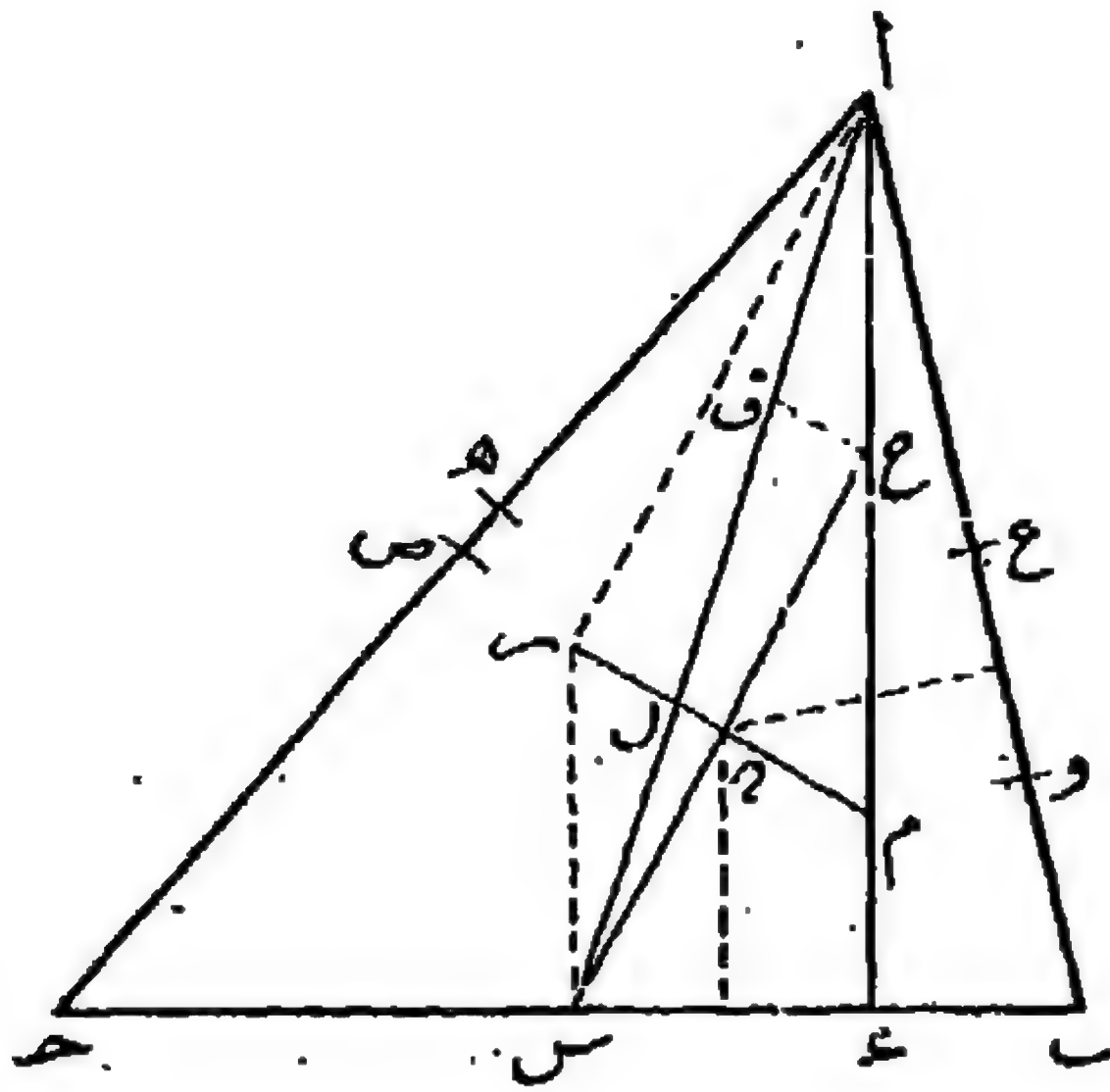
ومن حيث أن هذه الدائرة تمر برؤوس مثلث المواقع يمكن استنتاج كثير من خواصها

فيمكن البرهنة على أن

أولاً — مركز دائرة التسع هو منتصف المستقيم الواصل بين ملتقى ارتفاعات المثلث ومركز الدائرة المرسومة خارجه

ثانياً — قطر دائرة التسع يساوى نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث

ثالثاً — التخط الأربع : ملتقى المستقيمت المتوسطة في المثلث ومركز الدائرة المرسومة خارجه ومركز دائرة التسع وملتقى الارتفاعات كل هذه على استقامة واحدة



فإذا فرض في ΔABC أن S من BC V E منتصفات أضلاعه D H E $و$ مواقع ارتفاعاته النازلة من الرؤوس عليها M ملتقى الارتفاعات $و$ مركز الدائرة الخارجة O مركز دائرة التسع

فانه يطلب البرهنة على أن

أولاً — O منتصف HM

لأنه معلوم أن العمود المقام على DS من وسطه ينصف M (نظرية ٢٢)

وكذلك العمود المقام على OE من وسطه ينصف M

أى أن هذين العمودين يلتقيان في منتصف M

ومن حيث أن D S O E وتران في دائرة التسع

∴ نقطة تلاقي العمودين المقامين على هذين الوترين من وسطيهما هي مركز هذه الدائرة

(نظرية ٣١ نتيجة ١)

وهو المطلوب

المركز O هو منتصف M

∴

ثانياً — قطر دائرة التسع يساوى نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث

يؤخذ من النظرية السابقة أن S E قطر دائرة التسع

منتصف المستقيم SE هو مركز الدائرة

ولكن ثبت مما تقدم أن منتصف المستقيم MS هو مركز هذه الدائرة

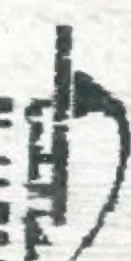
وعلى ذلك فكل من S E M $و$ ينصف الآخر في O

تمارين

- ١ المطلوب إيجاد المحل الهندسي لمركز دائرة النقط التسع اذا علم من المثلث قاعدته وزاوية رأسه
- ٢ دائرة النقط التسع للمثلث ABC الذي ملتقى ارتفاعاته M هي دائرة النقط التسع لكل من مثلثات AMB و CMB و AMC
- ٣ اذا كانت Y_1, Y_2, Y_3 مراكز الدوائر الخمسة للمثلث ABC من الداخل ومن الخارج فالدائرة المرسومة عليه هي دائرة النقط التسع لكل من المثلثات الأربعة الحادثة من توصيل أى ثلاث من النقط Y_1, Y_2, Y_3
- ٤ اذا مر محيط دائرة برؤوس جملة مثلثات وكانت متحدة في ملتقى ارتفاعاتها اتحدت كذلك في دائرة النقط التسع
- ٥ اذا علم من مثلث قاعدته وزاوية رأسه فبين أن إحدى زاويا مثلث المواقع وأحد أضلاعه ثابتا المقدار دائماً
- ٦ معلوم من مثلث قاعدته وزاوية رأسه ويراد إيجاد المحل الهندسي لمركز الدائرة التي تمر بمراكز الدوائر الثلاث الخمسة للمثلث من الخارج

(المطبعة الاميرية ٧٦٩ من و ٧٦٦١ ض ١٩٢٤ / ١١٥٠٠)

0519717



Bibliotheca Alexandrina